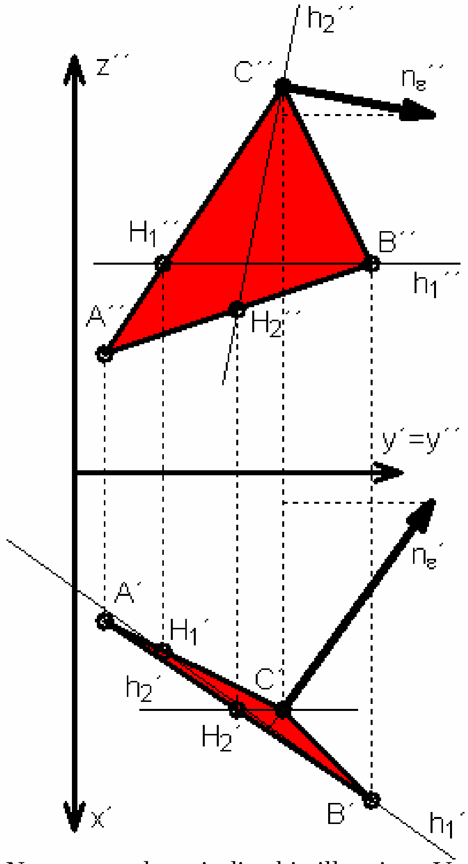

ε_{ABC}[A(10/2/8), B(22/20/14), C(16/14/26)]

Klasse: 5E/6X(Rg) Schuljahr(e) 2007/08/09

Mathematik bei ... ... Dr. R. RESEL

Konstruktive Ermittlung eines Normalvektors der Ebene ε_{ABC}

Nun verwenden wir die obig illustrierte Vorgehensweise, um allgemein bei Vorgabe zweier Vektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ einen Normalvektor der durch $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ erzeugten Ebene zu ermitteln, wozu wir vom zugehörigen Dreieck ΔABC[A(0/0/0), B($x_1/y_1/z_1$), C($x_2/y_2/z_2$)] ausgehen und zunächst mit der Ermittlung von h_1' beginnen:

h_1'' liegt parallel zur y-Achse, womit $H_1''(0/y/z_1)$ gilt. Um die fehlende y-Koordinate zu berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A''C''}$ auf: $\overrightarrow{A''C''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A''C''}: z_2 y - y_2 z = 0$

$$H_1'' \in g_{A''C''} \Rightarrow z_2 y - y_2 z_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{y_2 z_1}{z_2} \Rightarrow \boxed{H_1''\left(0 / \frac{y_2 z_1}{z_2} / z_1\right)}$$

Nun gehen wir zum Grundriss über, wo zunächst $H_1'\left(x / \frac{y_2 z_1}{z_2} / 0\right)$ gilt. Um die fehlende y-Koordinate zu berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A'C'}$ auf: $\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A'C'}: y_2 x - x_2 y = 0$

$$H_1' \in g_{A'C'} \Rightarrow y_2 x - \frac{x_2 y_2 z_1}{z_2} = 0 \Rightarrow x = \frac{x_2 z_1}{z_2} \Rightarrow \boxed{H_1'\left(\frac{x_2 z_1}{z_2} / \frac{y_2 z_1}{z_2} / 0\right)}$$

Mit $\overrightarrow{B'H_1'} = \frac{1}{z_2}\begin{pmatrix} x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ y_2 z_1 - y_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir dann einen Richtungsvektor von h_1', welcher aufgrund des Satzes vom rechten Winkel auf den Grundriss des Normalvektors von ε_{ABC} normal steht, ergo: $\boxed{\overrightarrow{n_\varepsilon'} \parallel \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ 0 \end{pmatrix}}$

Jetzt dasselbe für eine zweite Hauptgerade, wozu wir nun vom Grundriss ausgehen:

h_2' liegt parallel zur y-Achse, womit $H_2'(x_2/y/0)$ gilt. Um die fehlende y-Koordinate zu berechnen,

stellen wir eine Gleichung von $g_{A'B'}$ auf: $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A'B'}: y_1 x - x_1 y = 0$

$$H_2' \in g_{A'B'} \Rightarrow y_1 x_2 - x_1 y = 0 \Rightarrow y = \frac{x_2 y_1}{x_1} \Rightarrow \boxed{H_2'\left(x_2 / \frac{x_2 y_1}{x_1} / 0\right)}$$

Nun gehen wir zum Aufriss über, wo zunächst $H_2''\left(0 / \frac{x_2 y_1}{x_1} / z\right)$ gilt. Um die fehlende z-Koordinate zu

berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A''B''}$ auf: $\overrightarrow{A''B''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A''B''}: z_1 y - y_1 z = 0$

$$H_2'' \in g_{A''B''} \Rightarrow \frac{x_2 y_1 z_1}{x_1} - y_1 z = 0 \Rightarrow z = \frac{x_2 z_1}{x_1} \Rightarrow \boxed{H_2''\left(0 / \frac{x_2 y_1}{x_1} / \frac{x_2 z_1}{x_1}\right)}$$

Mit $\overrightarrow{C''H_2''} = \frac{1}{x_1}\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 x_2 - x_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \end{pmatrix}$ erhalten wir dann einen Richtungsvektor von h_2'', welcher aufgrund des Satzes vom rechten Winkel

auf den Aufriss des Normalvektors von ε_{ABC} normal steht, ergo: $\boxed{\overrightarrow{n_\varepsilon''} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}}$

Zusammen mit dem vorher erhaltenen Resultat $\boxed{\overrightarrow{n_\varepsilon'} \parallel \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ 0 \end{pmatrix}}$ ergibt sich somit via

$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}}$ das sogenannte vektorielle Produkt der Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, was abschließend zur fundamentalen

Definition. Unter dem vektoriellen Produkt $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ der Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ versteht man den via

$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}}$ definierten Vektor bzw. in Determinantenschreibweise: $\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}$

führt. UND NUN ZU ZAHLREICHEN ANWENDUNGEN DIESES NEUEN TOOLS: