49. Österreichische Mathematische Olympiade

Gemischter Vorbereitungskurs

`Kursleiter:` Dr. Robert Resel

`Schuljahr:` 2017/18

`Kursort:` AHS Heustadelgasse

Vermischte Übungsbeispiele für Anfänger (A) und Fortgeschrittene (F)

1. (F) Berechne genügend viele Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{7}{16} + \frac{9}{32} - \frac{11}{64} \pm ...,$$

bis du eine Vermutung für ein allgemeines Bildungsgesetz hast und beweise dieses Bildungsgesetz schließlich! Was ergibt sich aus deiner Beobachtung für den Grenzwert dieser unendlichen Reihe?

Lsg.: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot \frac{2k-1}{2^k} = \frac{1}{9} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{6n+1}{9 \cdot 2^n}$

2. (A) Beweise, dass die Gleichung

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$$

für beliebige reelle Zahlen $p \neq q$ und $a \neq 0$ stets zwei verschiedene reelle Lösungen hat.

3. (A) Man zeige: Sind a, b und c reelle Zahlen, welche nicht alle untereinander gleich sind, so besitzt die quadratische Gleichung

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

stets zwei reelle Lösungen.

4. (A) Für welche Werte des Parameters a in der Gleichung

$$x + (x+a)^2 + (x+2)^3 = (x+3)^3$$

besitzt die obige Gleichung genau eine Lösung? Man zeige, dass für die entsprechenden Werte a_1 und a_2 sowie die zugehörigen Lösungen x_1 und x_2 die Gleichung

$$a_1 + a_2 + x_1 + x_2 = 0$$

gilt.

5. (A) Sind a, b und c reelle Zahlen, welche die Bedingungen

$$a \neq b, \quad a+c>0 \;\text{ und }\; b+c>0$$

erfüllen, so beweise man, dass die Gleichung

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x-c}$$

stets zwei reelle Lösungen aufweist.

6. (F) Ermittle alle reellen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2-xy+y^2=7 \\ x^2y+xy^2=-2 \end{array} \right\}.$$

7. (F) Ermittle alle reellen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+xy=11 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{array} \right\}.$$

8. (F) Ermittle alle reellen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x(x+y)=3 \\ y(y+2x)=2 \end{array} \right\}.$$

9. (F) Ermittle alle reellen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2-xy+y^2=61 \\ 19(x+y)-xy=211 \end{array} \right\}.$$

10. (F) Ermittle alle reellen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2+xy+y^2+3x+3y=0 \\ x^2y-xy^2+x^2-y^2=9 \end{array} \right\}.$$

11. (A) Rechne nach, dass sowohl $1^2+2^3+4^2$ als auch $2^2+4^3+8^2$ und $3^2+6^3+12^2$ Quadratzahlen sind und beweise dies auch allgemein!

12. (F) Berechne genügend viele Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}+...,$$

bis du eine Vermutung für ein allgemeines Bildungsgesetz hast und beweise dieses Bildungsgesetz schließlich! Was ergibt sich aus deiner Beobachtung für den Grenzwert dieser unendlichen Reihe?

13. (A) Mittels vollständiger Induktion beweise man die folgende schöne Ungleichung:

$$\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

14. (F) Berechne genügend viele Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\frac{7}{81}+\frac{9}{243}+\frac{11}{729}+...,$$

bis du eine Vermutung für ein allgemeines Bildungsgesetz hast und beweise dieses Bildungsgesetz schließlich! Was ergibt sich aus deiner Beobachtung für den Grenzwert dieser unendlichen Reihe?

15. (A) Man beweise, dass die Gleichung

$$\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{(x+b)^2}$$

für $a \neq b$ stets genau zwei reelle Lösungen besitzt.

16. (A) Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b} \geq 0$$

für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen, welche in Summe nicht 0 ergeben, gilt.

17. (A) Man beweise, dass die quadratische Gleichung

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

niemals reelle Lösungen aufweist, wenn a, b und c die Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks bezeichnet.

18. (A) Man berechne alle reellen Lösungen der kubischen Gleichung

$$(2x+a+b)^3=(x+a)^3+(x+b)^3.$$

19. (A)

$$\begin{aligned}1^2+2\cdot 2^2+3^2&=4^2+?\\ 2^2+2\cdot 3^2+4^2&=6^2+?\\ 3^2+2\cdot 4^2+5^2&=8^2+?\end{aligned}$$

Vermutung? Beweis!

20. (A)

$$\begin{aligned}1^2-2\cdot 2^2+3^2&=?\\ 2^2-2\cdot 3^2+4^2&=?\\ 3^2-2\cdot 4^2+5^2&=?\end{aligned}$$

Vermutung? Beweis!

Wien, im Dezember 2017. Dr. Robert Resel, eh.