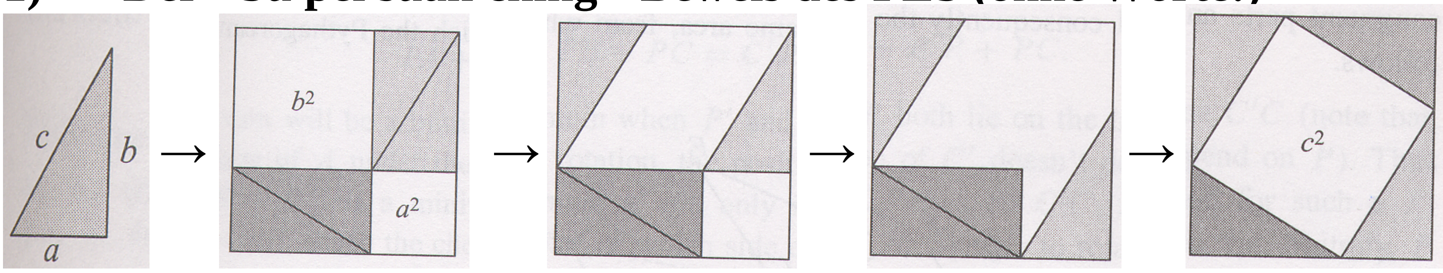
Weitere Anregungen für die "älteren Semester"[☺↓↓↓↓] des Wahlpflichtfachs Mathematik

2007/08

1) Der "Su pei suan ching"-Beweis des PLS (ohne Worte!)



2) Ein Beweis des PLS aus den "Wissenschaftlichen Nachrichten"

Zum Satz von Pythagoras

Robert Resel

Hat man im Mathematikunterricht das Thema „Ähnlichkeit“ und den Sehnen-Tangenten-Satz behandelt, so bietet sich an, den Satz von Pythagoras herzuleiten.

Der Beweis

Zum rechtwinkeligen Dreieck *ABC* zeichnen wir den Kreis mit dem Mittelpunkt *A* und dem Radius $a := \overline{AC}$. Dann ist *B* außerhalb des Kreises und die Gerade durch *B* und *C* ist eine Tangente an den Kreis. Wir schneiden die Gerade durch *B* und *A* mit dem Kreis und erhalten *R* und *S*. Nach dem Sehnen-Tangentensatz gilt

$$\overline{BR} \cdot \overline{BS} = \overline{BC}^2$$

(vgl. untenstehende Abbildung samt Beschriftung). Setzt man die Seitenlängen ein, so ist das die Gleichung

$$(c-a)\cdot(c+a) = b^2$$

bzw. $c^2 - a^2 = b^2$ bzw. $c^2 = a^2 + b^2$, also der Satz von Pythagoras.

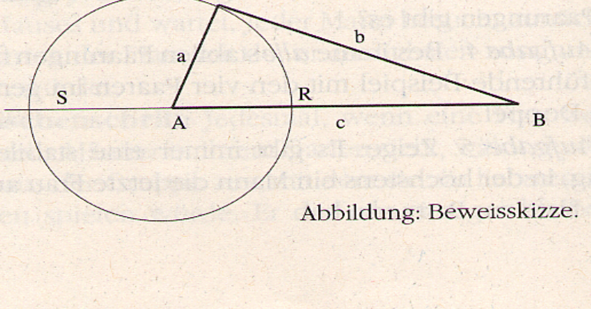


Abbildung: Beweisskizze.

Abschließende Bemerkungen

Mit dem Sehnen-Tangentensatz wird ein starkes Geschütz vorausgesetzt. (Er setzt den Ähnlichkeitsbegriffs voraus, vgl. auch [1, 2].) Trotzdem ist diese Vorgehensweise für den Mathematikunterricht im Realgymnasium oder Gymnasium der 3. Klasse gangbar.

Geht man von einem Kreis um *A* mit dem Radius $y := \overline{AC}$ aus, legt den Punkt *B* auf einer Geraden durch *A* im Abstand $x := \overline{BR}$ vom Kreis und konstruiert *C* aus einer Tangente an den Kreis durch *B*, dann kann man den Sehnen-Tangentensatz

$$\overline{BR} \cdot \overline{BS} = \overline{BC}^2$$

mit dem Satz von Pythagoras auch anschreiben als

$$x \cdot (x + 2y) = b^2 = (x+y)^2 - y^2$$

Umgeformt liefert das

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2,$$

also die „binomische Formel“.

Literatur:

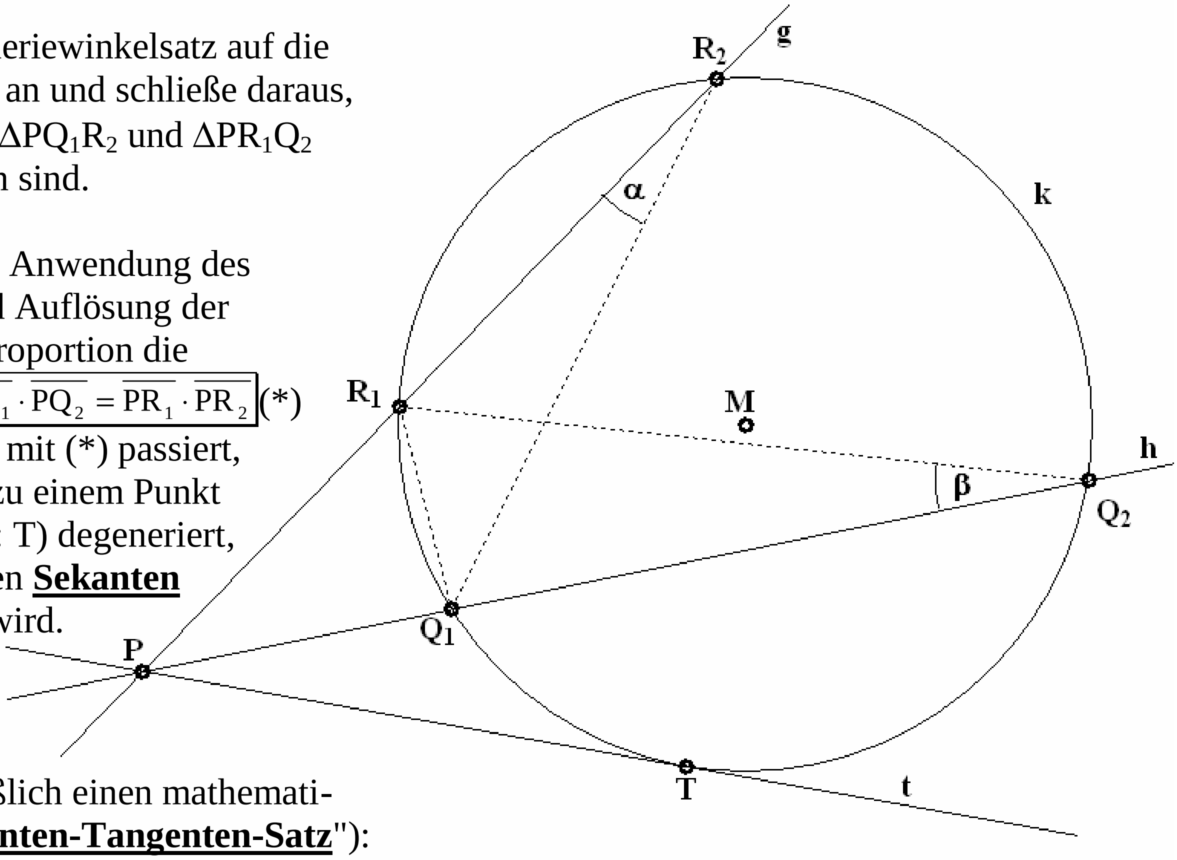
[1] Reichel, Hans-Christian et al. (2003): Das ist Mathematik 4. öbv&hpt, Wien.

[2] Baptist, Peter (1992): Pythagoras und kein Ende? Ernst Klett Schulbuchverlag, Leipzig.

Anschrift des Verfassers:
Dr. Robert Resel, BG-BRG-BORG 22, Heustadelgasse 4, 1220 Wien, E-Mail: robert.resel@chello.at

Anhang zu 2): Der Sehnen-Tangenten-Satz (*Anleitung zu einem Beweis*):

Für die Geraden g und h sowie den Kreis k gelte
$g \cap h = \{P\}$, $g \cap k = \{R_1, R_2\}$ sowie $h \cap k = \{Q_1, Q_2\}$.



Wende den Peripheriewinkelsatz auf die Sehne Q_1R_1 von k an und schließe daraus, dass die Dreiecke ΔPQ_1R_2 und ΔPR_1Q_2 zueinander ähnlich sind.

Folgere nun durch Anwendung des Strahlensatzes und Auflösung der Entsprechenden Proportion die Gültigkeit von $\boxed{\overline{PQ_1} \cdot \overline{PQ_2} = \overline{PR_1} \cdot \overline{PR_2}}$ (*) und überlege, was mit (*) passiert, wenn eine Sehne zu einem Punkt (in der Abbildung: T) degeneriert, also eine der beiden **Sekanten** zur **Tangente** (t) wird.

Formuliere schließlich einen mathematischen Satz ("**Sekanten-Tangenten-Satz**"):

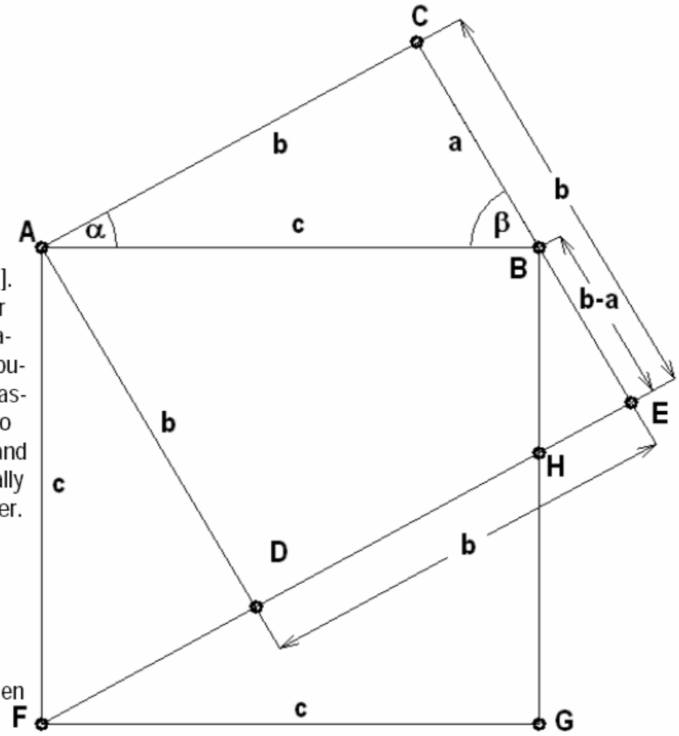
SATZ.

Raum für Notizen (Beweisidee/n):

3) Ein englischsprachiger Beweis des PLS (für eine amerikanische Zeitschrift)

Another proof of the pythagorean theorem

by Robert Resel, Vienna



INTRODUCTION

It is well known, that there exist hundred of proofs for the pythagorean theorem (short: "PT"). Many of them can be found in Elisha Scott LOOMIS´ famous work [1]. For more modern collections (which also include historical notes and many other interesting topics related to the PT) see for example [2] or [3]. During the preparation of a special course called "Geometry of triangles" for mathematically gifted pupils I was looking for more proofs of the PT than I normally teach in the "fourth classes" (which consist of pupils at the age of fourteen in our country). These are two classical greek proofs (which both work with partitions of a square), EINSTEIN´s and GARFIELD´s proofs. Beside the classical "Su pei suan ching"-proof it was especially Leonardo DA VINCI´s proof, which inspired me to the proof presented in that paper.

THE PROOF

Let´s have a look at the figure beside, where squares ADEC and AFGB have been built over the sides AC and AB of the right-handed triangle ABC (with the right angle at C). Without loss of generality we assume, that a<b (referring to the figure). Our aim is to prove, that the equation $a^2+b^2=c^2$ holds. Therefore we only have to compute the length of DH in two ways and to compare the results.

And here we go: It is easy to see, that $\angle BHE \cong \angle ABC$. Together with the fact, that $\angle BHE$ is a right angle follows, that $\Delta BHE \sim \Delta ABC$, whereby the ratio of corresponding lengths between ΔBHE and ΔABC is given by $\boxed{(b-a):b}$ (which follows by comparison of the lengths of BE and AC!). Thus HE must have the length $\boxed{\overline{HE} = \frac{a}{b}(b-a)}$, which implies immediately $\boxed{\overline{DH} = b - \frac{a}{b}(b-a)}$ (1).

So far, so good! Now we compute $\overline{DH}$ by another way:

ΔAFD is congruent to ΔABC (because ΔAFD is the image of ΔABC under the rotation with A as the centre of rotation and rotation-angle +90°), which implies, that FDA is a right angle. Now ADE is a right angle too (because quadrilateral ADEC is a square), so {D, E, F} is a collinear set of points [property (*)]. Because of $\angle FHG \cong \angle BHE$ it follows, that $\Delta FHG \sim \Delta ABC$, whereby the ratio of corresponding lengths between ΔFHG and ΔABC is given by $\boxed{c:b}$ (which follows by comparison of the lengths of FG and AC!). Thus FH must have the length $\boxed{\overline{FH} = \frac{c^2}{b}}$.

Now we use property (*), which implies, that $\boxed{\overline{DH} = \frac{c^2}{b} - a}$ (2).

From (1) and (2) follows $\boxed{b - \frac{a}{b}(b-a) = \frac{c^2}{b} - a}$, which is equivalent to $\boxed{b^2 - ab + a^2 = c^2 - ab}$, which finally implies $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$, □.

Vienna, the 2nd of November, 2007. Dr. Robert Resel

Literature:

[1] LOOMIS, E. S. (1972²). The Pythagorean Proposition. NCTM Classics, Washington D.C.

[2] MAOR, E. (2007). The Pythagorean Theorem. A 4.000-year history. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

[3] BAPTIST, P. (1998). Pythagoras und kein Ende? Ernst Klett Schulbuchverlag. Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf.

Adress of the author: Dr. Robert Resel
AHS Heustadelgasse
Heustadelgasse 4
1220 Vienna
Austria

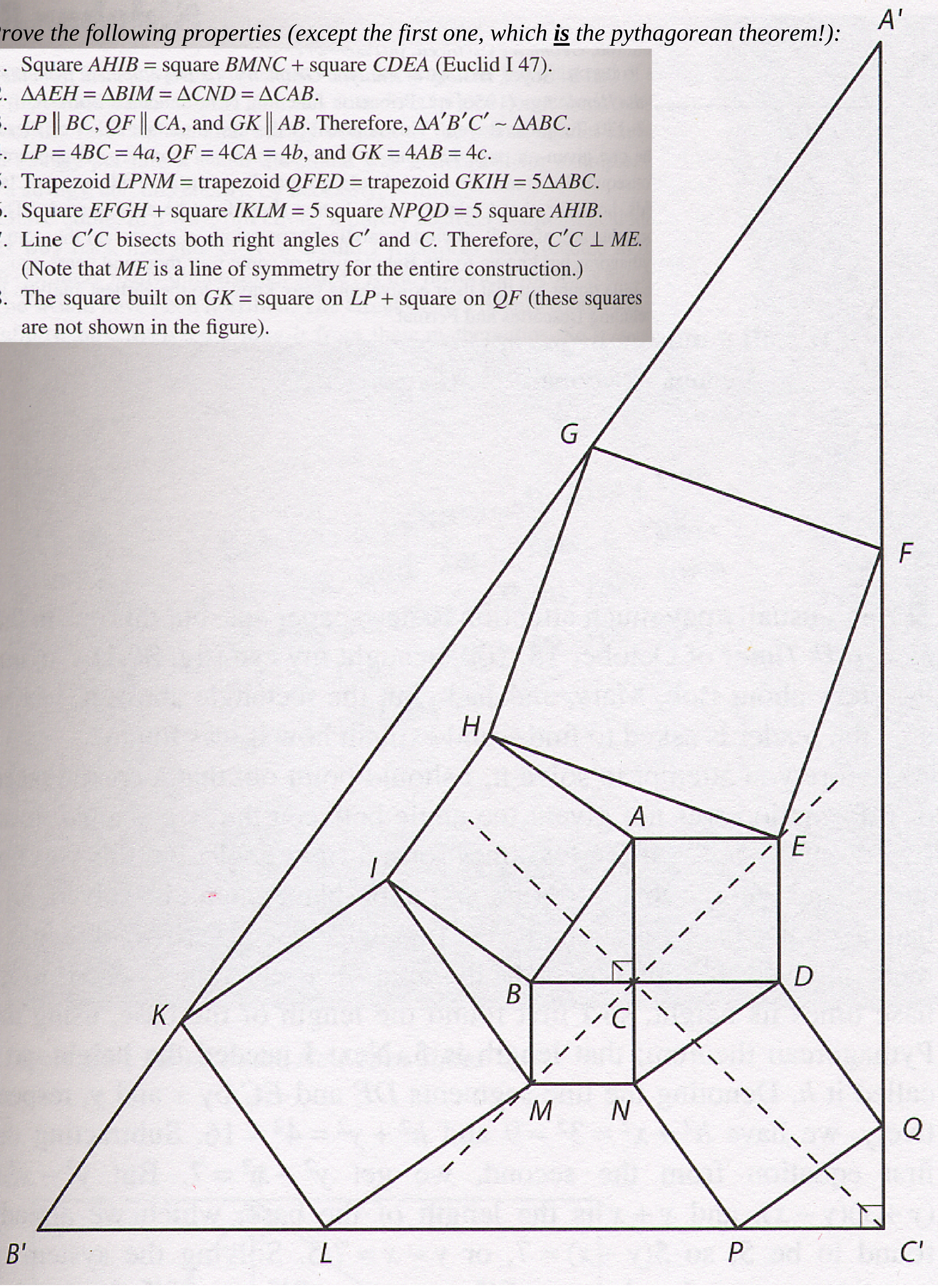
E-mail: robert.resel@chello.at

web: www.matheprof.at

4) Das angekündigte "pythagoreische Vermächtnis" (also in English!)

*Prove the following properties (except the first one, which **is** the pythagorean theorem!):*

1. Square $AHIB$ = square $BMNC$ + square $CDEA$ (Euclid I 47).
2. $\Delta AEH = \Delta BIM = \Delta CND = \Delta CAB$.
3. $LP \parallel BC$, $QF \parallel CA$, and $GK \parallel AB$. Therefore, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.
4. $LP = 4BC = 4a$, $QF = 4CA = 4b$, and $GK = 4AB = 4c$.
5. Trapezoid $LPNM$ = trapezoid $QFED$ = trapezoid $GKIH = 5\Delta ABC$.
6. Square $EFGH$ + square $IKLM$ = 5 square $NPQD$ = 5 square $AHIB$.
7. Line $C'C$ bisects both right angles C' and C. Therefore, $C'C \perp ME$. (Note that ME is a line of symmetry for the entire construction.)
8. The square built on GK = square on LP + square on QF (these squares are not shown in the figure).



Enjoy these four mathematical journeys!