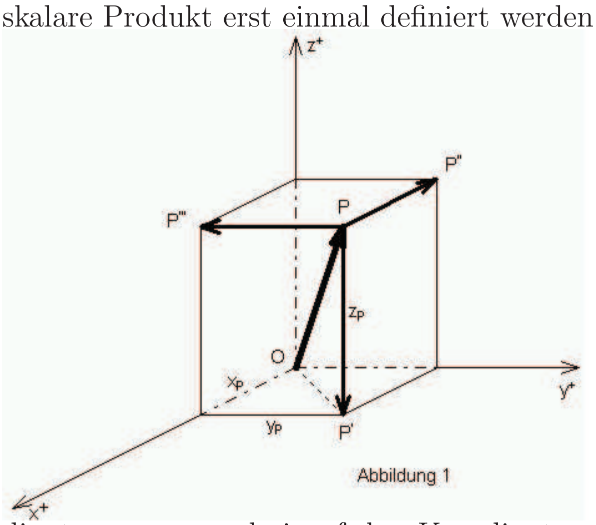
2.1.6 Das Orthogonalitätskriterium im $\mathbb{R}^3$

Um das Orthogonalitätskriterium auch für dreidimensionale Vektoren zu beweisen, muss zunächst einmal ausgehend vom (noch zu definierenden!) Betrag eines 3D-Vektors das skalare Produkt erst einmal definiert werden.



Zur Berechnung des Betrags des Vektors $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$ betrachten wir Abbildung 1, in welcher sich der zum Punkt $P(x_P|y_P|z_P)$ zugehörige *Koordinatenquader* befindet. Um P im $3D-$Koordinatensystem einzumessen, hat man demnach sechs verschiedene Möglichkeiten, sich von O aus entlang der Quaderkanten in Richtung P zu bewegen. Von den acht Eckpunkten des Quaders liegt/liegen einer im Koordinatenursprung, drei auf den Koordinatenachsen und die restlichen vier lauten gemäß der Beschriftung P, P', P'' und P'''. Dabei nennen wir

- P' den Grundriss von P (Ansicht von oben),
- P'' den Aufriss von P (Ansicht von vorne) und schließlich
- P''' den Kreuzriss von P (Ansicht von rechts).

Zur Berechnung des Betrags des Vektors $\overrightarrow{OP}$ stellen wir zunächst den $2D-$Vektor $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ auf und wenden im Dreieck $\Delta OP'P$ den Lehrsatz des PYTHAGORAS an, ergo (mit Vektoren angeschrieben):

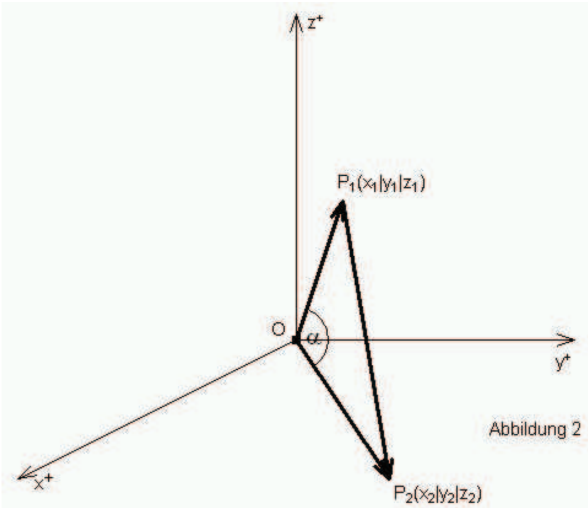
$$\left|\overrightarrow{OP'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{P'P}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

bzw. (mit Koordinaten angeschrieben)

$${x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

Daraus ergibt sich nun für den Beginn der **Analytischen Raumgeometrie** (oder auch **Räumliche Koordinatengeometrie**) der grundlegende

SATZ 1. $\left|\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2}$



Das nächste Analogon zu einem Fachbegriff aus der $2D-$Vektorrechnung ist nun jener des Skalaren Produkts, wozu wir Abbildung 2 betrachten:

Gilt nun $\alpha = 90°$ (d.h. die Vektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ stehen aufeinander normal), dann folgt aufgrund des Lehrsatzes von PYTHAGORAS

$$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OP_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2,$$

was ausgerechnet zu

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2 = \overbrace{(x_1 - x_2)^2}^{x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2} + \overbrace{(y_1 - y_2)^2}^{y_1{}^2 - 2y_1y_2 + y_2{}^2} + \overbrace{(z_1 - z_2)^2}^{z_1{}^2 - 2z_1z_2 + z_2{}^2}$$

bzw. nach Streichen der links wie rechts vorkommenden rein quadratischen Ausdrücke auf

$$0 = -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2$$

bzw. nach Division durch -2 auf

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

führt, was Anlass gibt zur

$\boxed{\text{DEFINITION 1.}}$ Die den Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ zugeordnete reelle Zahl $\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$ heißt *Skalares Produkt* von $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ und wird durch $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ abgekürzt.

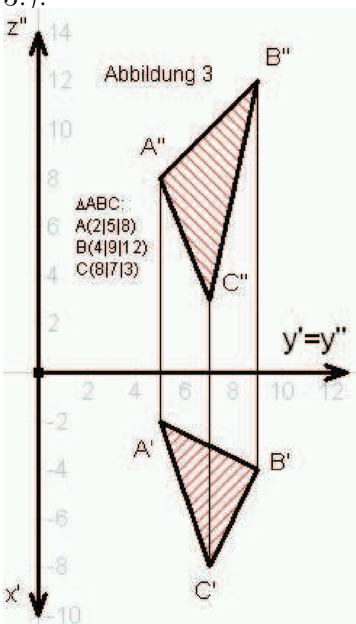
Der Anlass für Definition 1 zieht nach letzterer auch gleich den zweiten Satz der $3D-$Vektorrechnung nach sich, der da wäre (wobei die Gültigkeit der Implikationsrichtung $\Leftarrow$ durch Rückwärtslesen der Gleichungskette vor Definition 1 folgt!) :

$\boxed{\text{SATZ 2 („OK" im } \mathbb{R}^3\text{).}}$ Für $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ aus $\mathbb{R}^3$ gilt: $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$

2.2 Das Vektorielle Produkt zweier Vektoren

2.2.1 Ein Zugang über die darstellende Geometrie

Um (zum Beispiel einfache Objekte wie) Dreiecke im $\mathbb{R}^3$ ohne mehr oder minder komplizierte Schrägrisse zeichnerisch darzustellen, bedient man sich seit Gaspard MONGE (1746-1813), dem Urvater der *Darstellenden Geometrie* schlechthin, der sogenannten Zweitafelprojektion, deren Idee darauf beruht, von einem dreidimensionalen Objekt Grund- und Aufriss einander zugeordnet zu betrachten, indem man die Aufrissebene durch eine $90°-$Drehung um die $y-$Achse nach hinten in die Grundrissebene klappt, was dann folgende Konfiguration (sogenannte *zugeordnete Hauptrisse*) zur Folge hat (vgl. Abbildung 3!):



Die einem Punkt zugeordneten Hauptrisse (hier: Grund- und Aufriss) liegen dabei jeweils auf einem Ordner (vgl. die eingezeichneten Ordner in Abbildung 3!), was man auch als *Ordnerbedingung* bezeichnet.

Nun rechnet man unter Verwendung von Satz 2 leicht nach, dass das Dreieck ΔABC aus Abbildung 3 in seiner räumlichen Lage mit $\angle CAB$ einen rechten Winkel besitzt, was aber weder im Grund-, noch im Aufriss zu erkennen ist, da es sich dabei ja um Projektionen ("Schattenbilder") des wahren Dreiecks handelt, welche jeweils eine Dimension einbüßen.

Es stellt sich nun die berechtigte Frage, unter welchen Umständen ein "räumlicher rechter Winkel" auch im Grund- oder Aufriss wieder als rechter Winkel erscheint, was nicht schwierig zu beantworten ist, da wir dazu lediglich von zwei aufeinander normal stehenden $3D-$Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ auszugehen haben, weshalb dann wegen Satz 2 automatisch $\boxed{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \quad (*)}$ gelten muss.

Betrachten wir nun an Stelle von $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ ihre Grundrisse $\overrightarrow{v_1}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, so schließen diese genau dann ebenfalls einen rechten Winkel ein, wenn

$$\overrightarrow{v_1}' \cdot \overrightarrow{v_2}' = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \quad (**)$$

gilt. Damit sowohl $(*)$ als auch $(**)$ gilt, muss $z_1z_2 = 0$ gelten, was nur dann sein kann, wenn entweder $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$ gilt. Dies bedeutet aber, dass entweder $\overrightarrow{v_1}$ oder $\overrightarrow{v_2}$ parallel zur $xy-$Ebene ("Grundrissebene", Abkürzung: π_1) liegt, was uns Anlass gibt zur

DEFINITION 2. Eine Gerade (bzw. einer ihrer Richtungsvektoren) befindet sich in **erster bzw. zweiter Hauptlage**, wenn sie **parallel zur Grundrissebene bzw. Aufrissebene** π_1 bzw. π_2 verläuft.

Rechnerisch drückt sich die erste bzw. zweite Hauptlage eines Vektors wie soeben überlegt eben gerade dadurch aus, dass seine $z-$ bzw. $x-$Koordinate Null ist.

Der Anlass für Definition 2 zieht nach letzterer den folgenden wichtigen Satz der Raumgeometrie nach sich:

Satz 3 (Satz vom rechten Winkel). Der Grund- bzw. Aufriss eines rechten Winkels im Raum ist genau dann wieder ein rechter Winkel, wenn zumindest einer der beiden Winkelschenkel erste bzw. zweite Hauptlage aufweist.

Der Satz vom rechten Winkel gibt uns jetzt zusammen mit der Kippregel eine Möglichkeit an die Hand, zu zwei gegebenen 3D-Vektoren einen auf beide normale stehenden Vektor zu ermitteln:

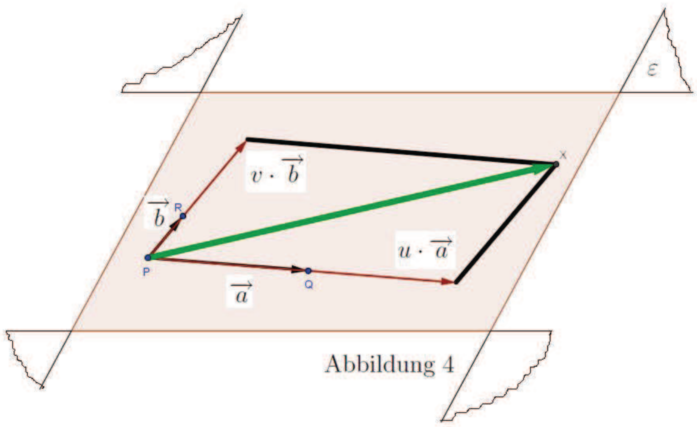


Abbildung 4

Dazu gehen wir von einer durch drei Punkte P, Q und R aufgespannten Ebene ε auf, was unmittelbar zwei sogenannte *Stellungsvektoren* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ von ε generiert, welche eine Ebene ε aufspannen, von der jeder beliebige Punkt X (wie bei einer Parameterdarstellung einer Gerade in der Ebene!) unter Verwendung von P, $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ wie folgt beschrieben werden kann: Die vorletzte Klammerbemerkung legt zusammen mit Abbildung 4 auch schon unsere weitere Vorgehensweise offen, die darin besteht, analog zum Begriff *Normalvektor einer Gerade* in der $2D-$Geometrie den Begriff *Normalvektor einer Ebene* in der $3D-$Geometrie einzuführen, wozu wir zunächst die sogenannte Parameterdarstellung einer Ebene behandeln:

Abbildung 4 zeigt, dass man **jeden** Punkt X der Ebene ε erreichen kann, indem man in P zunächst den *ersten Stellungsvektor* $\overrightarrow{a}$ von ε und hernach den *zweiten Stellungsvektor* $\overrightarrow{b}$ von ε jeweils geeignet oft (in Abbildung 4: zuerst u mal $\overrightarrow{a}$ und dann v mal $\overrightarrow{b}$, was aber auch in umgekehrter Reihenfolge zu X führt!) anhängt, was analog zur Parameterdarstellung einer Gerade in der Ebene zur Parameterdarstellung einer Ebene im Raum führt (anschauliche Hilfe: u und v sind Koordinaten von X in einem in E liegenden (im Allgemeinen) schiefwinkligen Koordinatensystem, wobei $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ Richtungsvektoren der "Koordinatenachsen" sind und der Ursprung in P liegt.), die da Inhalt ist von

Satz 4. Es sei/en P ein Punkt sowie $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ Stellungsvektoren einer Ebene ε. Dann besitzt ε die Parameterdarstellung (PDST)

$$\varepsilon: \; X = P + u \cdot \overrightarrow{a} + v \cdot \overrightarrow{b} \quad (*)$$

wobei P der sogenannte *Auf- oder Startpunkt* ist.

Nun kann man Ebenen im Raum (ebenso wie Geraden in der Ebene!) aber auch parameterfrei darstellen (Dies gilt - wie wir bald sehen werden - aber nicht für Geraden im Raum!), wozu man die PDST (∗) nur links und rechts skalar mit einem Vektor $\overrightarrow{n}$ multiplizieren muss, welcher sowohl auf $\overrightarrow{a}$ als auch $\overrightarrow{b}$ normal steht, was dann wegen

$$\varepsilon: \quad \overrightarrow{n} \cdot X \quad = \quad \overrightarrow{n} \cdot P \; + \; u \cdot \overbrace{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}}^{0} \; + \; v \cdot \overbrace{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{n}}^{0}$$

zur Gleichung

$$\varepsilon: \quad \overrightarrow{n} \cdot X \quad = \quad \overrightarrow{n} \cdot P \qquad \text{bzw.} \qquad \varepsilon: \quad \overrightarrow{n} \cdot (X - P) = 0$$

führt, welche in ihrer zweiten Variante wegen $X - P = \overrightarrow{PX}$ ja gerade aussagt, dass $\overrightarrow{n}$ **auf jeden Stellungsvektor von** ε **normal steht**. Als Konsequenz **dieser herausragenden Eigenschaft** von $\overrightarrow{n}$ nennt man diesen *Normalvektor von* ε und erhält damit unmittelbar

$\boxed{\textsc{Satz 5.}}$ Es sei P ein Punkt sowie $\overrightarrow{n}$ ein Normalvektor einer Ebene ε. Dann besitzt ε die *Normalvektorform* (NVF)

$$\varepsilon: \quad \overrightarrow{n} \cdot X \quad = \quad \overrightarrow{n} \cdot P \; .$$

Nun ist das ja alles schön und gut, doch wie kommt man jetzt zu einem Normalvektor einer Ebene, wenn diese (z.B. durch drei Punkte, aus denen man mühelos zwei Stellungsvektoren errechnet und ferner einen Punkt als Aufpunkt wählt, womit man bereits eine Parameterdarstellung zur Verfügung hat) vorgegeben ist?

Zur Beantwortung dieser Frage erweitern wir zunächst Definition 2 (erste und zweite Hauptlage einer Gerade) und wenden hernach Satz 3 (Satz vom rechten Winkel) an:

$\boxed{\textsc{Definition 3.}}$ Geraden einer Ebene, welche erste bzw. zweite Hauptlage aufweisen, werden erste bzw. zweite Hauptgeraden genannt.

Damit liegt nun zusammen mit Satz 3 auf der Hand, wie man sich rasch einen Normalvektor $\overrightarrow{n}$ einer Ebene ε verschafft:

- Man berechnet zunächst je einen Richtungsvektor einer ersten bzw. zweiten Hauptgerade von ε.
- Ausgehend von diesen beiden Richtungsvektoren ermittelt man dann unter Anwendung des Satzes vom rechten Winkel und der Kippregel aus der $2D-$Vektorrechnung den Grund- bzw. Aufriss $\overrightarrow{n}'$ bzw. $\overrightarrow{n}''$ von $\overrightarrow{n}$.
- Mit einer Portion gesundem Hausverstand folgert man dann schließlich aus den Projektionen $\overrightarrow{n}'$ und $\overrightarrow{n}''$ des gesuchten Normalvektors $\overrightarrow{n}$ seine Originalkoordinaten im Raum.

Setzen wir das soeben geschilderte "Dreipunkteprogramm" nun technisch in die Tat um, wobei wir von den Stellungsvektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ einer Ebene ε

ausgehen (Da es uns nur um die Bestimmung von $\overrightarrow{n}$ geht, ist der Aufpunkt P ohne Belang!):

- Einen Richtungsvektor $\overrightarrow{h_1}$ bzw. $\overrightarrow{h_2}$ einer ersten bzw. zweiten Hauptgerade von ε erhalten wir unschwer durch die "gewichtete Vektorsumme"
  (Fachbegriff: **Linearkombination**) $\boxed{z_2 \cdot \overrightarrow{a} - z_1 \cdot \overrightarrow{b}}$ bzw. $\boxed{x_2 \cdot \overrightarrow{a} - x_1 \cdot \overrightarrow{b}}$, ergo:
  $$\overrightarrow{h_1} = z_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - z_1 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 z_2 \\ y_1 z_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 z_1 \\ y_2 z_1 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  bzw.
  $$\overrightarrow{h_2} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - x_1 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 \\ x_1 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \end{pmatrix}$$
  (Der/die *Connaisseur/e* entdeckt hier bereits zahlreiche Determinanten!)

- Da bei Hauptgeraden nach dem Satz vom rechten Winkel ebenjener erhalten bleibt (insbesondere zu $\overrightarrow{n}$!), drehen wir $\overrightarrow{h_1}$ im Grundriss ($h_1{}' = h_1$!) und $\overrightarrow{h_2}$ im Aufriss ($h_2{}'' = h_2$!) um jeweils 90° **im $\boxed{\text{U}}$hrzeigersinn** (Erinnere: Nach Vertauschen der Koordinaten wechselt man **diesfalls** das Vorzeichen **$\boxed{\text{u}}$nten**!) und erhalten
  $$\overrightarrow{n}' = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{n}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} .$$

- Durch nicht mehr als genaues Hinsehen schließt man aus den Darstellungen von $\overrightarrow{n}'$ bzw. $\overrightarrow{n}''$ sofort auf
  $$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} ,$$
  und wir sind fertig!

Wie man nun durch Anwendung von Satz 2 ("OK") leicht nachrechnet [Zur Übung und Wiederholung(!) empfohlen!], steht der erhaltene Vektor $\overrightarrow{n}$ sowohl auf $\overrightarrow{a}$ als auch auf $\overrightarrow{b}$ normal, was aufgrund unserer angestellten Überlegungen ja so sein muss.

Um die (auf manchen Betrachter vielleicht sehr umständlich wirkende) Darstellung von $\overrightarrow{n}$ nicht stupid auswendig lernen zu müssen, schafft hier einmal mehr eine *Mnemotechnik* Abhilfe, die überdies einen Fachbegriff beinhaltet, der uns seit dem Einstieg in die Vektorrechnung begleitet, und zwar jener der *Determinante* (welchen wir seitdem immer mit dem Flächeninhalt bzw. später in der Trigonometrie mit dem Sinus assoziiert haben), wodurch sich die Darstellung von $\overrightarrow{n}$ auch in der Form

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

anschreiben lässt, was uns gleich Anlass gibt zur

DEFINITION 4. Unter dem *Vektoriellen Produkt* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ der Vektoren

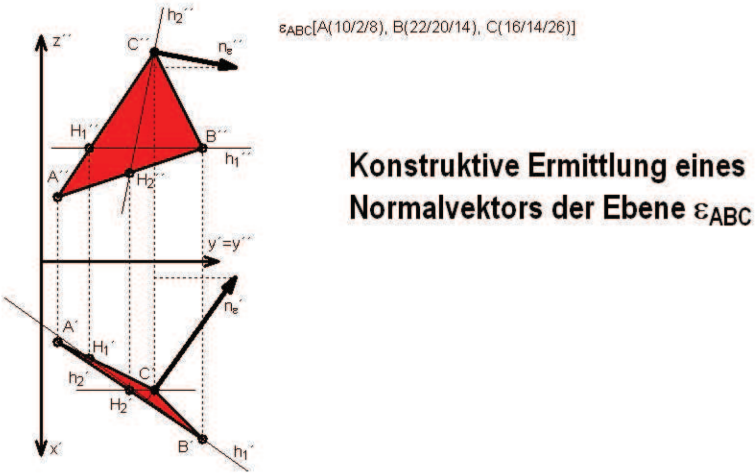
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ versteht man den Vektor } \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

dessen Eigenschaften [analytisch/geometrisch (rechter Winkel, Skalarprodukt, Flächeninhalt, Orientierung) sowie algebraisch (Rechenregeln!)] wir in folgendem gigantischen Satz 6 zusammentragen: **SATZ 6.** (Eigenschaften des Vektoriellen Produkts).
Für alle Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ des $\mathbb{R}^3$ und für alle Skalare λ, μ und τ aus $\mathbb{R}$ gilt:

- (6.1) $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{b} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = 0$
- (6.2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{o}$
- (6.3) $(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) \times \left[\left(\mu \cdot \overrightarrow{b}\right) + (\tau \cdot \overrightarrow{c})\right] = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + (\lambda\tau) \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
- (6.4) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = \vec{o}$
-
  - (6.5.1) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{a}$
  - (6.5.2) $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$
- (6.6) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} + \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \vec{o}$
- (6.7) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ sind wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand orientiert.
- (6.8) $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- (6.9) $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|^2 + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 = |\overrightarrow{a}|^2 \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|^2$

2.2.2 Ein zweiter Zugang über die darstellende Geometrie

Die hinter dem im letzten Abschnitt beschrittenen Weg steckende Idee lässt sich in zugeordneten Hauptrissen auch konstruktiv umsetzen, wie anhand der unteren Abbildung an einem konkreten Beispiel einer durch drei Punkte A, B und C festgelegten Ebene und einer Ermittlung eines ihrer Normalvektoren demonstriert wird. Im Folgenden werden wir tiefer in diese Konstruktion eindringen und daraus zu einer weiteren Herleitung der Koordinatendarstellung des Vektoriellen Produkts gelangen:



Da nach dem Satz vom rechten Winkel nur die ersten bzw. zweiten Hauptgeraden einer Ebene auch im Grund- bzw. Aufriss auf den Grund- bzw. Aufriss jedes Normalvektors orthogonal stehen, erfordert dies zunächst die Konstruktion des Grundrisses h_1' einer ersten Hauptgerade von ε. Dazu machen wir uns die offenkundige Eigenschaft erster Hauptgeraden zunutze, derzufolge deren Aufrisse parallel zur $y-$Achse verlaufen, weshalb wir den Aufriss h_1'' der ersten Hauptgerade durch B ganz einfach einzeichnen können, und zwar gleich inkl. dem Schnittpunkt H_1'' von h_1'' mit $g_{A''C''}$. Der Aufriss von h_1 durch B geht also auch durch den Aufriss eines entsprechenden Punkts H_1 auf g_{AC}, von dem wir somit nur noch den zugehörigen Grundriss H_1'' zu ermitteln haben, den wir einfach durch die Ordnerbedingung erhalten. Dadurch können wir den Grundriss h_1' der ersten Hauptgerade h_1 durch B einfach als Trägergerade von B' und H_1' konstruieren und erhalten dann den Grundriss eines Normalvektors, indem wir (z.B. - wie in der Abbildung - durch C) eine Normale auf h_1' einzeichnen. Entsprechend wird verfahren, um den Aufriss h_2'' einer zweiten Hauptgeraden (in der Abbildung durch C) zu erhalten.

Nun verwenden wir die obig illustrierte und soeben beschriebene Vorgehensweise[1], um allgemein bei Vorgabe zweier Stellungsvektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ einer Ebene ε einen Normalvektor zu ermitteln, wozu wir vom zugehörigen Dreieck ΔABC mit den Eckpunktem $A(0|0|0)$, $B(x_1|y_1|z_1)$ und $C(x_2|y_2|z_2)$ ausgehen und zunächst mit der Ermittlung von h_1' durch B' beginnen.[2]
h_1'' liegt parallel zur $y-$Achse, womit $H_1''(0|y|z_1)$ gilt. Um die fehlende $y-$Koordinate zu

[1]Man bezeichnet diese Methode (von H_1'' zu H_1' bzw. von H_2' zu H_2'' zu gelangen) auch als "**Angittern eines Punkts**".

[2]Dass wir A in den Ursprung legen, schränkt die Allgemeinheit nicht an, da jede nicht durch den Ursprung gehende Ebene durch Parallelverschiebung längs eines Normalvektors in eine derartige Lage gebracht werden kann, was aber an der Normalenrichtung der Ebene nichts ändert.

berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A''C''}$ auf:

$$\overrightarrow{A''C''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A''C''}: z_2 y - y_2 z = 0$$

$$H_1'' \in g_{A''C''} \Rightarrow z_2 y - y_2 z_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{y_2 z_1}{z_2} \Rightarrow \boxed{H_1'' \left(0 \middle| \tfrac{y_2 z_1}{z_2} \middle| z_1\right)}$$

Nun gehen wir zum Grundriss über, wo zunächst $H_1' \left(x \middle| \frac{y_2 z_1}{z_2} \middle| 0\right)$ gilt. Um die fehlende $x-$Koordinate zu berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A'C'}$ auf:

$$\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A'C'}: y_2 x - x_2 y = 0$$

$$H_1' \in g_{A'C'} \Rightarrow y_2 x - \frac{x_2 y_2 z_1}{z_2} = 0 \Rightarrow x = \frac{x_2 z_1}{z_2} \Rightarrow \boxed{H_1' \left(\tfrac{x_2 z_1}{z_2} \middle| \tfrac{y_2 z_1}{z_2} \middle| 0\right)}$$

Mit $\overrightarrow{B'H_1'} = \frac{1}{z_2} \begin{pmatrix} x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ y_2 z_1 - y_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir dann einen Richtungsvektor von h_1', welcher aufgrund des Satzes vom rechten Winkel auf den Grundriss jedes Normalvektors von ε normal steht, ergo:

$$\overrightarrow{n_\varepsilon}' \parallel \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt dasselbe für eine zweite Hauptgerade h_2 durch C, wozu wir nun vom Grundriss ausgehen: h_2' liegt parallel zur $y-$Achse, womit $H_2'(x_2|y|0)$ gilt. Um die fehlende $y-$Koordinate zu berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A'B'}$ auf:

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} x_1\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A'B'}: y_1 x - x_1 y = 0$$

$$H_2' \in g_{A'B'} \Rightarrow y_1 x_2 - x_1 y = 0 \Rightarrow y = \frac{x_2 y_1}{x_1} \Rightarrow \boxed{H_2' \left(x_2 \middle| \tfrac{x_2 y_1}{x_1} \middle| 0\right)}$$

Nun gehen wir zum Aufriss über, wo zunächst $H_2'' \left(0 \middle| \frac{x_2 y_1}{x_1} \middle| z\right)$ gilt. Um die fehlende $z-$Koordinate zu berechnen, stellen wir eine Gleichung von $g_{A''B''}$ auf:

$$\overrightarrow{A''B''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{A''B''}: z_1 y - y_1 z = 0$$

$$H_2'' \in g_{A''B''} \Rightarrow \frac{x_2 y_1 z_1}{x_1} - y_1 z = 0 \Rightarrow z = \frac{x_2 z_1}{x_1} \Rightarrow \boxed{H_2'' \left(0 \middle| \tfrac{x_2 y_1}{x_1} \middle| \tfrac{x_2 z_1}{x_1}\right)}$$

Mit $\overrightarrow{C''H_2''} = \dfrac{1}{x_1}\begin{pmatrix} 0 \\ y_1x_2 - x_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir dann einen Richtungsvektor von h_2'', welcher aufgrund des Satzes vom rechten Winkel auf den Aufriss jedes Normalvektors von ε normal steht, ergo:

$$\overrightarrow{n_\varepsilon''} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit dem vorher erhaltenen Resultat $\overrightarrow{n_\varepsilon'} \parallel \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich somit via $\begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$ das sogenannte vektorielle Produkt der Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, was abschließend zur folgenden fundamentalen Definition führt:

$\boxed{\text{Definition.}}$ Unter dem **Vektoriellen Produkt** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ der Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ versteht man den via $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$ definierten Vektor bzw. in Determinantenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Ein dritter Zugang über Parameterelimination

Ausgehend von der im vorletzten Abschnitt eingeführten Parameterdarstellung

$$\varepsilon : X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

einer Ebene ε durch den Punkt $P(x_P|y_P|z_P)$ mit den Stellungsvektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ wandeln wir $(*)$ durch schrittweise Elimination der Parameter λ und μ in eine parameterfreie Form um:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{I.} & x = x_P + x_1 \cdot \lambda + x_2 \cdot \mu \\ \text{II.} & y = y_P + y_1 \cdot \lambda + y_2 \cdot \mu \\ \text{III.} & z = z_P + z_1 \cdot \lambda + z_2 \cdot \mu \end{array} \right\}$$

IV.: $y_1\cdot$ I. $-$ $x_1\cdot$ II. bzw. V.:= $z_1\cdot$ II. $-$ $y_1\cdot$ III. liefert

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{IV.} & y_1x - x_1y = y_1x_P - x_1y_P + (y_1x_2 - x_1y_2) \cdot \mu \\ \text{V.} & z_1y - y_1z = z_1y_P - y_1z_P + (z_1y_2 - y_1z_2) \cdot \mu \end{array} \right\},$$

womit λ eliminiert wäre. Zwecks Eliminierung von μ bilden wir
VI.: $(y_1z_2 - z_1y_2)\cdot$ IV. + $(y_1x_2 - x_1y_2)\cdot$ V. und erhalten dadurch

$$\text{VI.} \quad y_1(y_1z_2-z_1y_2)(x-x_P)-x_1(y_1z_2-z_1y_2)(y-y_P)y+z_1(y_1x_2-x_1y_2)(y-y_P)-y_1(y_1x_2-x_1y_2)(z-z_P) = 0$$

bzw.

$$\text{VI.} \quad y_1(y_1z_2-z_1y_2)(x-x_P)+(\underbrace{-x_1y_1z_2 + x_1z_1y_2 + y_1z_1x_2 - x_1z_1y_2}_{-y_1(x_1z_2-z_1x_2)})(y-y_P)y+y_1(x_1y_2-y_1x_2)(z-z_P) = 0,$$

also nach Division durch y_1 (was $y_1 \neq 0$ voraussetzt!)[3] mit

$$\varepsilon : \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (\#)$$

[3]Hierbei ist zu beachten, dass wir nur deshalb auf die Forderung $y_1 \neq 0$ geführt wurden, weil wir im ersten Eliminationsschritt den Parameter λ eliminiert haben, der mit dem Stellungsvektor $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ zusammenhängt und überdies die $y-Zeile$ II. zweimal verwendet haben. Hätten wir stattdessen zweimal I. bzw. III. verwendet, wären wir (Es bleibt dem L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser überlassen, dies nachzuweisen!) auf die Bedingung $x_1 \neq 0$ bzw. $z_1 \neq 0$ (bzw. - wenn wir im ersten Schritt μ eliminert hätten - $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ oder $z_1 \neq 0$) gestoßen und wären aber ebenso zur folgenden parameterfreien Gleichung von ε genannt!

eine parameterfreie Gleichung von ε. Kürzen wir den ersten "Faktorvektor" des skalaren Produkts auf der linken Seite von (#) mit $\overrightarrow{n_\varepsilon}$ ab, so lässt sich (#) auch in der Form

$$\varepsilon : \overrightarrow{n_\varepsilon} \cdot (X - P) = 0 \text{ bzw. } \varepsilon : \overrightarrow{n_\varepsilon} \cdot X = \overrightarrow{n_\varepsilon} \cdot P \ (1) \text{ bzw. } \varepsilon : \overrightarrow{n_\varepsilon} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \ (2)$$

schreiben.

(2) kann man aufgrund des Orthogonalitätskriteriums so interpretieren, dass für jeden in ε liegenden Punkt X der Vektor $\overrightarrow{PX}$ auf den Vektor $\overrightarrow{n_\varepsilon}$ normal steht. Da es sich bei $\overrightarrow{PX}$ stets um einen Stellungsvektor handelt, ist für $\overrightarrow{n_\varepsilon}$ somit die Bezeichnung *Normalvektor von* ε angebracht, welcher insbesondere auf die Stellungsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ normal steht, weshalb wir definieren:

DEFINITION. Unter dem **Vektoriellen Produkt** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ der Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ versteht man den via $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$ definierten Vektor bzw. in Determinantenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Aus (1) ergibt sich der sogenannte

SATZ (Normalvektorsatz): Ist P ein Punkt einer Ebene ε mit dem Normalvektor $\overrightarrow{n_\varepsilon}$, so gilt für jeden Punkt X in ε die Gleichung $\varepsilon : \overrightarrow{n_\varepsilon} \cdot X = \overrightarrow{n_\varepsilon} \cdot P$ ("Normalvektorform").

2.2.4 Ein vierter Zugang über den Schnitt zweier Ebenen

Jetzt überlegen wir uns durch eine ganz simple Idee und deren analytische Umsetzung einen weiteren Weg zum vektoriellen Produkt:

Dazu gehen wir von zwei Ebenen ε_1 und ε_2 mit den Normalvektoren $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ aus und konstatieren, dass jeder Richtungsvektor der Schnittgerade s der beiden Ebenen auch ein Stellungsvektor von jeder der beiden Ebenen ist und somit sowohl auf $\overrightarrow{n_1}$ als auch auf $\overrightarrow{n_2}$ normal steht. Dies liefert uns daher eine Methode, um zu zwei vorgegebenen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ einen dritten Vektor zu ermitteln, der auf beide Ausgangsvektoren normal steht:

Man interpretiert die beiden Vektoren als Normalvektoren zweier Ebenen, ermittelt zwei Punkte auf der Schnittgerade s und erhält dadurch einen Richtungsvektor von s, der das Gewünschte leistet. Jene beiden Punkte können wir an und für sich beliebig wählen, weshalb wir dazu zwei der drei *Spurpunkte* von s (Das sind die Schnittpunkte von s mit den Koordinatenebenen.) verwenden, wozu wir in den beiden Ebenengleichungen

$$\varepsilon_1: \ x_1x + y_1y + z_1z = d_1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2: \ x_2x + y_2y + z_2z = d_2$$

für den jeweiligen Spurpunkt die entsprechende Koordinate Null setzen:

Für den Spurpunkt $S_1(x|y|0)$ gilt demnach

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1x + y_1y = d_1 \\ x_2x + y_2y = d_2 \end{array} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

wofür wir durch Anwendung der CRAMERschen Regel

$$(x|y) = \left(\frac{d_1y_2 - d_2y_1}{x_1y_2 - x_2y_1} \middle| \frac{d_2x_1 - d_1x_2}{x_1y_2 - x_2y_1} \right) \quad \text{und somit} \quad S_1\left(\frac{d_1y_2 - d_2y_1}{x_1y_2 - x_2y_1} \middle| \frac{d_2x_1 - d_1x_2}{x_1y_2 - x_2y_1} \middle| 0 \right)$$

erhalten.

Analog errechnet sich $S_2(0|y|z)$ via

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1y + z_1z = d_1 \\ y_2y + z_2z = d_2 \end{array} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

zu

$$S_2\left(0 \middle| \frac{d_1z_2 - d_2z_1}{y_1z_2 - y_2z_1} \middle| \frac{d_2y_1 - d_1y_2}{y_1z_2 - y_2z_1} \right),$$

woraus sich insgesamt

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \frac{1}{(x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (y_1z_2 - y_2z_1)} \cdot \begin{pmatrix} (d_2y_1 - d_1y_2) \cdot (y_1z_2 - y_2z_1) \\ (d_1z_2 - d_2z_1) \cdot (x_1y_2 - x_2y_1) + (d_1x_2 - d_2x_1) \cdot (y_1z_2 - y_2z_1) \\ (d_2y_1 - d_1y_2) \cdot (x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\overrightarrow{S_1S_2} \parallel \begin{pmatrix} (d_2y_1 - d_1y_2)\cdot(y_1z_2 - y_2z_1) \\ d_1\cdot(x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 + x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1) - d_2\cdot(x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 + x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1) \\ (d_2y_1 - d_1y_2)\cdot(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (d_2y_1 - d_1y_2)\cdot(y_1z_2 - y_2z_1) \\ d_1y_2\cdot(x_1z_2 - x_2z_1) - d_2y_1\cdot(x_1z_2 - x_2z_1) \\ (d_2y_1 - d_1y_2)\cdot(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix} = (d_2y_1 - d_1y_2)\cdot\begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix},$$

ergo

$$\overrightarrow{S_1S_2} \parallel \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

ergibt, womit wir ein weiteres Mal das vektorielle Produkt erhalten hätten.

2.2.5 Ein fünfter Zugang, nochmals über den Schnitt zweier Ebenen

In gewisser Weise (bzw. teilweise) als Umkehrung des dritten Zugangs, ermitteln wir die Schnittgerade der Ebenen (die wir wie schon im zweiten Zugang o.B.d.A. beide durch den Ursprung legen)

$$\varepsilon_1:\ x_1x+y_1y+z_1z=0 \ \text{ und } \ \varepsilon_2:\ x_2x+y_2y+z_2z=0$$

dadurch, dass wir eine der beiden Ebenen (Wir wählen ε_1.)[4] in eine[5] Parameterdarstellung umwandeln, indem wir der Einfachheit halber zwei der möglichen drei Hauptvektoren als Stellungsvektoren verwenden [6]:

$$\varepsilon_1:\ X=\lambda\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ -x_1\\ 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix} 0\\ z_1\\ -y_1\end{pmatrix}$$

Das *Schnittobjekt*[7] $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2$ lässt sich jetzt analytisch dadurch beschreiben, dass die Koordinatenzeilen der Parameterdarstellung von ε_1 in die parameterfreie Form von ε_2 eingesetz werden:

$$\varepsilon_1\cap\varepsilon_2:\ x_2y_1\lambda-x_1y_2\lambda+y_2z_1\mu-y_1z_2\mu=0 \quad\Rightarrow\quad (x_2y_1-x_1y_2)\cdot\lambda=(y_1z_2-y_2z_1)\cdot\mu\ (*)$$

Daraus ergibt sich für λ und μ die Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix} y_1z_2-y_2z_1\\ x_2y_1-x_1y_2\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R},$$

was eingesetzt in die Normalvektorform von ε_2 auf die folgende analytische Beschreibung des Schnittobjekts $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2$ führt:

$$\varepsilon_1\cap\varepsilon_2:\ X=t\cdot\begin{pmatrix} y_1(y_1z_2-y_2z_1)\\ -x_1y_1z_2+x_1y_2z_1+x_2y_1z_1-x_1y_2z_1\\ y_1(x_1y_2-x_2y_1)\end{pmatrix} \text{ bzw. } X=t\cdot y_1\cdot\begin{pmatrix} y_1z_2-y_2z_1\\ -(x_1z_2-x_2z_1)\\ x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

Dies lässt nun erstmals ohne Verwendung anschaulich "fundierter" Sachverhalte rein analytisch erkennen, dass es sich beim Schnittobjekt $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2$ um eine ebenso (wie ε_1 und ε_2) durch den Koordinatenursprung verlaufende Gerade s mit dem Richtungsvektor

$$\overrightarrow{r_s}=\begin{pmatrix} y_1z_2-y_2z_1\\ -(x_1z_2-x_2z_1)\\ x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

handelt, was uns ein fünftes Mal auf das vektorielle Produkt führt.

---

[4]Der werte L$\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ser führe diese zur Übung stattdessen mit ε_2 durch!

[5]Man beachte den unbestimmten Artikel!

[6]Der werte L$\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ser möge auch andere Kombinationen durchgehen!

[7]Wir bezeichnen *dieses* bewusst **nicht** als Schnittgerade, weil sich bei diesem Zugang nämlich ein **Beweis** dafür ergibt, dass zwei Ebenen einander längs einer Geraden schneiden, was ja "nur" anschaulich evident ist (und im vierten Zugang entsprechend verwendet wurde), womit sich nunmehr sozusagen eine Lücke schließt.

2.2.6 Ein sechster Zugang, erneut über den Schnitt zweier Ebenen

Dieser aus vagen Andeutungen bestehende Abschnitt soll den werten L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser dazu animieren, in ähnlicher Weise wie im vorherigen Abschnitt vorzugehen:

$$\varepsilon_1 : \; x_1x + y_1y + z_1z = 0 \;\text{ und }\; \varepsilon_2 : \; x_2x + y_2y + z_2z = 0$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon_1 : \; X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 : \; X = \sigma \cdot \begin{pmatrix} y_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 : \quad \left\{ \begin{array}{llllll} \text{I.} & y_1\lambda & & -\, y_2\sigma & & = 0 \\ \text{II.} & -\, x_1\lambda & +\, z_1\mu & +\, x_2\sigma & -\, z_2\tau & = 0 \\ \text{III.} & & -\, y_1\mu & & +\, y_2\tau & = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{IV.} := x_2 \cdot \text{I.} + y_2 \cdot \text{II.}, \quad \text{V.} := z_2 \cdot \text{III.}$$

$\Rightarrow$ VI. := IV. + V. führt auf die Gleichung $(*)$ aus dem letzten Abschnitt.