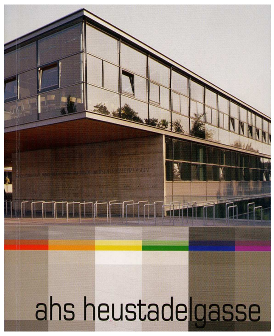
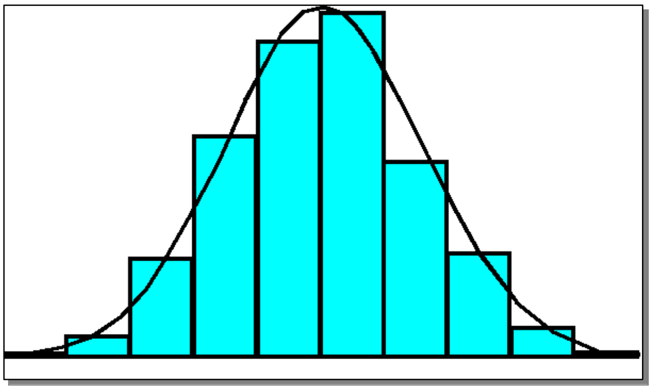
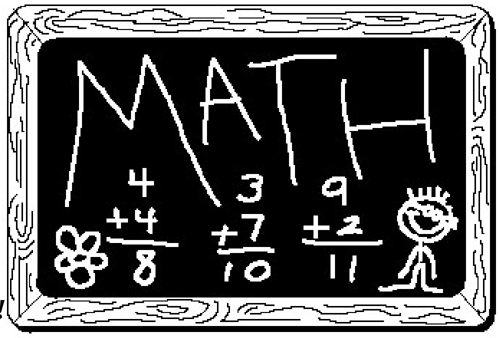
Übungsbeispiele für die dreistündige Schularbeit sowie für die schriftliche Matura
[8B (gymnasialer Teil), 2013/14]



Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der **Stochastik** *(speziell: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen stetiger Zufallsvariabler) ein Kapitel der 8. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für* ***Maturabeispiele*** *sind.*



ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



1) Seit der Einführung elektronischer Klassenbücher in vielen Schulen wurde sowohl eine Längs- (über drei Jahre!) als auch Querschnittsuntersuchung (über zwölf Schulstufen hinweg, wobei ingesamt 486 Schüler beteiligt waren) durchgeführt, welche der Frage nachging, nach welcher Zeitspanne während dieser vier Jahre erstmals eine Klassenbucheintragung erfolgte. Die stochastische Analyse ergab, dass die in Jahren gemessene Zeitspanne bis zur ersten Klassenbucheintragung (BHZ als Kürzel für "Bravheitszeit") als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0;3]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{1}{972}(100x^3 - 270x^2 + 459)$ beschrieben werden kann.

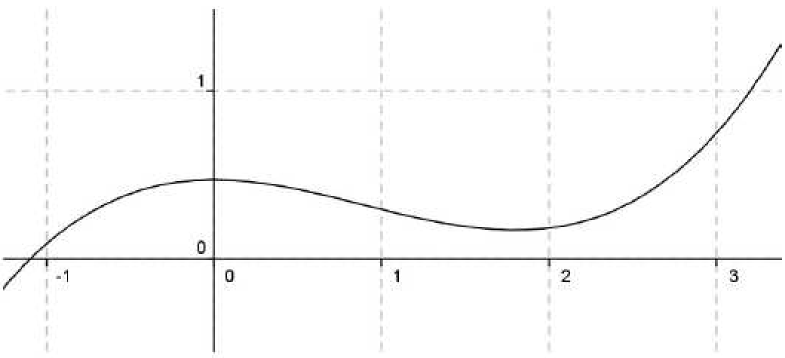
(a) Beweise, dass φ wirklich eine Dichtefunktion ist und begründe auch die Richtigkeit des entsprechenden Funktionsgraphenverlaufs in der rechten unteren Abbildung! Welche Informationen lassen sich dieser Abbildung entnehmen? **5P**

(b) Berechne die durchschnittliche BHZ (μ) in Jahren! **2P**

(c) Um wie viele Jahre (σ) streut die BHZ im Mittel um μ? **2P**

(d) Bei wie vielen Schülern weicht daher die BHZ um höchstens σ von μ ab? Begründe, dass dies mehr als 50% sind! **3P**

(e) Wie viele Schüler waren länger als zwei Jahre brav? **3P**



2) Besuch aus dem Rg-Teil der PSK: ☺

Ein Kommunikationspsychologe hat wissenschaftlich untersucht, wie lange B.T. (Bieber Timberlake, siehe Abbildung rechts) braucht, bis sich von ihm angesprochene Damen hoffnungslos in ihn verlieben. Der Wissenschaft(l)er war mehr als überrascht, dass die entsprechende in Minuten(!) gemessene stetige Zufallsvariable X lediglich über den Ereignisraum Ω=[0;1] verfügt und überdies durch die sehr einfach gebaute Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = -\frac{21}{10} \cdot x^5 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{5}$ beschrieben wird.

a) Begründe, warum es sich bei φ tatsächlich um die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;1] handelt, berechne die durchschnittliche "Funkdauer" μ sowie die Standardabweichung σ (jeweils in Sekunden)!

b) Justin hat bereits 31* Damen der achten Klassen "angeflirtet". Bei wie vielen von ihnen sollte gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell die "Funkdauer" um höchstens σ von μ abweichen?
* inkl. Dominica?!? ☺

3) Auch Romal Weishaar (nicht nur Just-In!) hat Erfolg bei den Damen, Details dazu:

$\varphi(x) = \frac{1}{125} \cdot \left(252x^5 - 200x^3 + 133\right)$, Ω=[0;1]

a) Zeige, dass es sich bei φ in der Tat um die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;1] handelt, berechne die durchschnittliche "Funkdauer" μ sowie die Standardabweichung σ (jeweils in Sekunden)!

b) Omar flirtet (anders als Justin) nicht nur mit den Acht-, sondern auch mit den Siebt- (und tw. sogar Sechst-) klässlerinnen, insgesamt waren es bislang 87(!)*. Bei wie vielen von ihnen sollte gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell die "Funkdauer" um höchstens σ von μ abweichen?
* Wiederum: inkl. Dominica?!? ☺

4) Alternativ-Modell zur vorletzten Aufgabe:

Als Justin noch jünger war (Unterstufe!), brauchte es mit der "Funkdauer" ein wenig länger, Details: $y = \varphi(x) = -\frac{91}{25} \cdot x^5 + \frac{16}{5} \cdot x^2 + \frac{27}{50}$, Ω=[0;1]

a) Um wie viele Sekunden dauerte es im Mittel länger als in seiner Oberstufenzeit (Δμ)? Kontrolliere zunächst, dass φ alle Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichefunktion erfüllt!

b) Zeige, dass sich bei σ nichts geändert hat!

c) Im Laufe seiner Unterstufenzeit hat Just-In weit über 100 Damen angeflirtet (Justinologen schätzen die Zahl in der Oberstufe – bislang! – auf über 500, aber (noch!) unter 1000 ein!☺), 35 davon aus der eigenen Schule. Bei wie vielen davon sollte gemäß dem hier postulierten stochastischen Modell die "Funkdauer" um höchstens σ von μ+Δμ abweichen?

5) Und nun auch ein Alternativ-Modell zur jetzt vorletzten Aufgabe:

In der Unterstufe war Omar noch nicht so gut in Form (Dafür hat er den Bieber jetzt aber haushoch übertroffen!!), was sich in einer weitaus längeren durchschnittlichen "Funkdauer" äußerte, Details: $y = \varphi(x) = -\frac{56}{18225} \cdot x^5 + \frac{2}{27} \cdot x^2 + \frac{53}{225}$, Ω=[0;3]

a) Um wie viele Sekunden dauerte es im Mittel länger als in seiner Oberstufenzeit (Δμ)? Verifiziere zuallererst, dass φ alle Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichefunktion erfüllt!

b) Zeige, dass σ um Δσ=½ größer war als mittlerweile in der Oberstufe!

c) Im Laufe seiner Unterstufenzeit hat Ömchen nur knapp 100 Damen angeflirtet (Omarologen schätzen die Zahl in der Oberstufe – bislang! – auf über 1000, aber (noch!) unter 10000 ein!☺), 51 davon aus der eigenen Schule. Bei wie vielen davon sollte gemäß dem hier als gültig postulierten stochastischen Modell die "Funkdauer" um höchstens σ+Δσ von μ+Δμ abweichen?

6) "M^2" (aka Mary Minnesota) hat sich in St. Paul zur Erinnerung eine Digitalkamera gekauft, über die sie folgende Details in Erfahrung bringen konnte: Die in Dekaden gemessene Lebensdauer ist als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der folgenden Funktionsgleichung verteilt:
$y = \varphi(x) = 10 \cdot x^3 - \frac{33}{5} \cdot x^2 + \frac{7}{10}$

a) Warum liegt hier eine Dichtefunktion einer stetigen ZV mit $\Omega=[0;1]$ vor?
b) Berechne die durchschnittliche Lebensdauer μ einer solchen Kamera in Jahren!
c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (ebenso in Jahren anzugeben)!
d) Mary und 63 weitere Austrianerinnen haben sich eine solche Kamera gekauft. Bei wie vielen der Damen sollte die Lebensdauer ihrer Kamera um höchstens σ von μ abweichen?

7) Sophie interessierte sich als Inkognito-Mathematikerin (Psst!☺) natürlich (sic!) brennend (und mit viel Herz!☺) dafür, ob es bereits ein stochastisches Modell für die Arbeitsdauer bei der vierstündigen Mathematik-Klausur gibt.[1] Sie wurde rasch fündig. Professor Pi hat herausgefunden, dass die Arbeitsdauer als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;4]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung
$y = \varphi(x) = \frac{7}{5120} \cdot x^5 - \frac{1}{8} \cdot x + \frac{4}{15}$ verteilt ist.

a) Warum liegt hier eigentlich eine Dichtefunktion einer stetigen ZV mit $\Omega=[0;4]$ vor?
b) Berechne die durchschnittliche Arbeitsdauer μ bei der Mathe-Klausur in Stunden und Minuten!
c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (ebenso in Stunden und Minuten anzugeben)!
d) Begründe ohne Taschenrechner, dass die Intervallwahrscheinlichkeit $P(|X-\mu|<\sigma)$ mehr als 75% beträgt und interpretiere, was die Ungleichung $|X-\mu|<\sigma$ überhaupt aussagt!

8) Freilich hat sich EX-MpPS (**M**atho**p**hobe **P**anik-**S**ophie☺) davor auch schon für ein entsprechendes Modell die dreistündige Schularbeit betreffend interessiert. Ergebnis ihrer Recherchen:
$y = \varphi(x) = -\frac{35}{5832} \cdot x^4 + \frac{13}{54} \cdot x + \frac{5}{72}$, $\Omega=[0;3]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 7), wobei Aufgabenteil d) entsprechend durch ≈62% (anstelle von >75%) zu ersetzen ist!

9) Ergänzung sowohl zu den vorherigen Aufgaben 7) & 8) als auch zur Marietta/Dominica-Zusatzaufgabe vom 2.1.2013 auf http://matheprof.at/8B201314Uebersicht.html
Sophie fand vor ihrem Schulwechsel 2008/09 (Programm Bezirksverdopplung!☺) heraus, dass die Arbeitsdauer bei einstündigen Schularbeiten ihrer zukünftigen Schule als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{1}{30} \cdot \left(231x^5 - 250x^3 + 54\right)$, verteilt ist.
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in der oben zitierten Marietta/Dominica-Zusatzaufgabe ("M/D/Z"), wobei anstelle von $P(|X-\mu|<\sigma)=51\%$ zu bearbeiten ist, bei wie vielen von 117 Schülern eines Jahrgangs die Arbeitszeit um höchstens σ von μ abweicht! Vergiss nicht auf die Begründung(saufforderung) in der letzten Zeile der M/D/Z!

10) Zweite Ergänzung zur M/D/Z (vor allem bezüglich der Fußnote 1 ebenda!):
Dominica hat vor ihrem Schulwechsel noch recherchiert, wie es in ihrer zukünftigen Schule mit der Arbeitsdauer bei zweistündigen Mathematik-Schularbeiten aussieht. Ergebnis ihrer Recherchen:
$y = \varphi(x) = \frac{7}{1280} \cdot x^6 + \frac{31}{80} \cdot x + \frac{1}{16}$, $\Omega=[0;2]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 7), wobei Aufgabenteil d) durch die folgende Fragestellung d*) zu ersetzen ist:
d*) Bei wie vielen Schülern einer großen Klasse mit 30 Schülern weicht die Arbeitsdauer um höchstens σ von μ ab?

[1]: Freilich gibt es (je nachdem, welchem empirischen Datenmaterial das Modell zugrunde liegt!) mehrere Modelle, vgl. z.B. eines meiner Maturabeispiele im Jahresbericht 2008/09 auf S. 174!

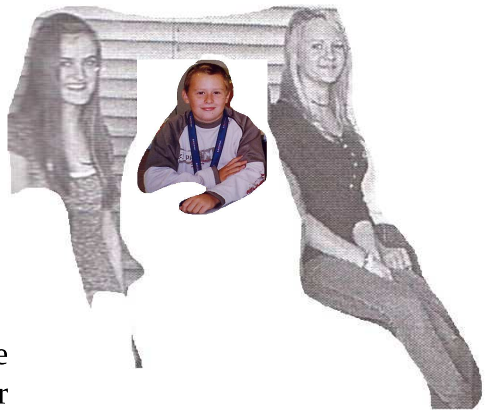
11) Eintagsfliegen werden im Englischen als "maiflies" (MF), gelegentlich aber auch als one-day flies (ODF) bezeichnet. Nun haben Omar, Damaris und special guest star Filip H. (einst bff von Romal!☹) das in Tagen (sic!) gemessene Lebensalter von Eintagsfliegen als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;1] modelliert und nannten das Projekt entsprechend auch ODF (für Omar, Damaris und Filip). Da Mary (wie ach so oft) den Großteil der Arbeit übernommen hat, insistierte sie letztendlich auf das Kürzel MF (Mary-Fliege). Jedenfalls erhielten sie nach langwieriger Analyse die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{-21}{32} \cdot x^6 + \frac{155}{64} \cdot x^2 + \frac{55}{192}$.

a) Kontrolliere trotz Marys wohl profunder Arbeit, dass es sich tatsächlich um eine Dichte handelt!
b) Berechne die sich aus dem Modell ergebende durchschnittliche Lebensdauer μ von ODF in Stunden!
c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (ebenso in Stunden)!
d) Bei wie vielen von 93 ODF sollte modellgemäß die Lebensdauer um maximal σ von μ abweichen?

12) Schreibt man MC Minnesotas (MC für Mary-Charlotte!) Nachname ausnahmsweise mit K, so ergeben sich die Initialen DK, was aber auch für Deutsch-Klausur stehen kann, die euch allen bald ins Haus stehen wird. MC (nicht schüchtern) hat sich natürlich bei Herrn Professor Sams (in Personalunion auch DKs Klassenpapa) erkundigt, ob er über eine Statistik der Arbeitszeit bei bisherigen DKen verfügt. Seine Reaktion: "Dass ich nicht lache! Du weißt doch, Statistik ist nicht meine Sache. Eher schon die Geometrie, viel mehr aber die Poesie. Ich mache mich doch nicht zum Affen, Statistiken sollen andere schaffen. Ich bin doch kein Esel, frage doch den Resel!" Gesagt, getan, brachte sie ihre Frage bei letzterem an. Und so bekam sie sehr schnell das nun folgende stochastische Modell:
Die Arbeitszeit bei DKen ist als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;5] nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{3}{625} \cdot x^3 - \frac{3}{250} \cdot x^2 + \frac{3}{20}$ verteilt.

a) Gerade weil das Modell von MMP [Marys Mathe-Prof(.at)] stammt, hat sie natürlich nach dem Motto "Kontrolle ist besser als Vertrauen!" erst einmal alle Eigenschaften von Dichtefunktionen kontrolliert. Guter Rat (ist sonst teuer, hier aber gratis!): Folge ihrer Intuition! ☺
b) Berechne die sich aus dem Modell ergebende durchschnittliche Arbeitszeit μ bei DKen!
c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (Resultat in Stunden und Minuten angeben)!
d) Verifiziere die σ-Regel $P(|X-\mu|<\sigma)=58½\%$!

13) Die Zukunft, aus der Sicht von Claudias Tochter Gloria [;-)], ihres Zeichens Molekularbiologin, die sich auf das Bekämpfen (freilich auf Zeit!) des menschlichen Alterungsprozesses spezialisiert hat, natürlich (sic!) inkl. entsprechender stochastischer Analysen (konnte schon die Frau Mama @ school very good!): Das in Jahrhunderten gemessene Alter jener von Gloria Wernsdorfer [die Zweite! Jaja, Mama Claudia und Papa Matthias, d.h. Claudia hat den (eigentlich: einen!) Nikolaus höchstpersönlich geheiratet. Schwägerin Gloria (die Erste) ist selig, ihre bff nun (auch formell!) zur family zählen zu dürfen …] behandelten Probanden kann als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;2] durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{63}{2560} \cdot x^6 - \frac{1}{64} \cdot x^3 + \frac{49}{160}$ beschrieben werden.



a) Prüfe auf Dichtefunktion!
b) Wie alt werden "gewernsdorferte" Probanden im Durchschnitt (μ)? Gib das Resultat in Jahren an!
c) Berechne überdies die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Jahren angeben)!
d) Bei wie vielen von 19 Probanden weicht das Lebensalter um höchstens σ von μ ab?

14) Glorias Enkelin Andrea hat die Arbeit von "W. Gloria" [;-)], II. derart erfolgreich fortgeführt, dass ihre Probanden noch älter werden. Die mathematischen Details dazu lauten wie folgt:
$y = \varphi(x) = -\frac{203}{34992} \cdot x^6 + \frac{595}{10368} \cdot x^4 + \frac{1}{128}$; Ω=[0;3]
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 13), wobei anstelle von 19 nunmehr bereits von 72 Probanden auszugehen ist!

15) Als Claudia selbst als Mikrobiologinnen arbeitete, wurden die von ihr behandelten Probanden noch nicht wie bei ihrer Tochter 200 Jahre alt. Die stochastischen Details zu Claudias empirischer Forschung lauten: $y = \varphi(x) = -\frac{966}{125} \cdot x^5 + \frac{44}{5} \cdot x^3 + \frac{11}{125}$; $\Omega=[0;1]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 13), wobei anstelle von 19 von 34 Probanden auszugehen ist!

16) Back to he future: Auch Glorias Tochter "Cadriau" wurde Mikrobiologin und machte Gloria W. II Konkurrenz, mathematische Details dazu lauten wie folgt: $y = \varphi(x) = \frac{35}{256} \cdot x^4 - \frac{1}{8} \cdot x + \frac{3}{16}$; $\Omega=[0;2]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 13), wobei anstelle von 19 von 46 Probanden auszugehen ist!

17) Weiter voraus in die Zukunft: Claudias Enkelsohn "Giallo" wurde ebenso Mikro-Biologe machte Andrea Konkurrenz, mathematische Details dazu lauten wie folgt: $y = \varphi(x) = \frac{28}{18225} \cdot x^5 + \frac{8}{45} \cdot x + \frac{1}{225}$; $\Omega=[0;3]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 13), wobei anstelle von 19 von 123 Probanden auszugehen ist!

18) Surprise! ☺ Gloria selbst wurde auch Mikrobiologin und machte ihre bff Konkurrenz, mathematische Details dazu lauten wie folgt: $y = \varphi(x) = -\frac{25}{4} \cdot x^3 + \frac{45}{8} \cdot x^2 + \frac{11}{16}$; $\Omega=[0;1]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 13), wobei anstelle von 19 von 128 Probanden auszugehen ist!

19) "$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\text{L}}$" steht nicht nur für die amerikanische Comedy-Show "Saturday Night Live", sondern auch für $\boxed{\text{S}}$tochastik-$\boxed{\text{N}}$erd $\boxed{\text{L}}$ukas (für Outsider: Kev-Boys zweiter Vorname!), der sich bei seinem KV Prof. Sams gleich zu Beginn der Oberstufe über stochastische Details bzgl. der Arbeitszeit bei zweistündigen Deutsch-Schularbeiten erkundigte. Nachdem sein Deutsch-Prof darauf mit einem ähnlichen Reim als schon zuvor in Aufgabe 12) der guten alten Mary gegenüber konterte, erhielt Kev-Boy von seinem damals zukünftigen Mathe-Prof(.at) die folgenden stochastischen Details:
Die Arbeitszeit bei zweistündigen Deutsch-Schularbeiten ist als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;2]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{21}{2560} \cdot x^6 - \frac{27}{320} \cdot x^2 + \frac{43}{80}$ verteilt.

a) Kontrolliere, dass φ auch alle Charakteristika einer Dichtefunktion erfüllt!
b) Wie lange arbeitet ein Schüler gemäß diesem Modell durchschnittlich (μ)?
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis in Minuten angeben)!
d) Bei der ersten zweistündigen Deutsch-Schularbeit der 5B/6B/7B/8B (2010/11/12/13/14) nahmen 23 Schüler teil. Bei wie vielen dieser Schüler wich die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ ab?

20) (Inhaltliche, aber nicht mathematische) Fortsetzung von Aufgabe 19): Gleich zu Beginn der 8. Klasse interessierte sich "$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\text{L}}$" freilich für ein entsprechendes Modell für dreistündige Deutsch-Schularbeiten. Als CSI (Chief Stochastics Investigator) stieß Kev-Boy auf das folgende stochastische Modell:
Die Arbeitszeit bei dreistündigen Deutsch-Schularbeiten ist als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{196}{98415} \cdot x^6 + \frac{8}{135} \cdot x + \frac{1}{27}$ verteilt.

a) Gehe sicher, dass φ auch wirklich alle Charakteristika einer Dichtefunktion aufweist!
b) Wie lange arbeitet ein Schüler gemäß diesem Modell durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Stunden und Minuten an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Stunden und Minuten angeben)!
d) Konzentrieren wir uns im Folgenden auf die dreistündige Deutsch-Schularbeit der 8B im Jahre 2014, dabei aber auf das Dutzend Gymnasiasten sowie (neben Dominica sitzend!☺) Justarathilin. Bei wie vielen dieser insgesamt 13 Schüler sollte die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

21) In Just-Ins Schule gibt es am Vormittag (inkl. Frühaufsicht) insgesamt 60 Minuten Pause. Bi(e)ber(haufenwegbewohner?!?) a.k.a. Timberlake hat nun wissenschaftlich untersucht, wie viel Zeit jene Schüler seiner Schule, die bei ihm in der Flirt-Mediation waren innerhalb dieser 60 Minuten dem Flirten widmen und stellte gemeinsam mit Herrn R. Wallner (R wie Rafael, Rudolf und vor allem: Random!☺) ein stochastisches Modell auf, demzufolge die in Stunden gemessene dem Flirten gewidmete Zeit als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\frac{1}{160}\cdot\left(-651x^5+1050x^3+6\right)$ verteilt ist.

a) Kontrolliere, dass es sich bei φ wirklich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte über [0;1] handelt!
b) Wie lange flirtet ein Just-In-Schüler gemäß diesem Modell durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Minuten an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis in Minuten und Sekunden angeben)!
d) Bei wie vielen von 87 Just-Ins Schülern wich die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ ab?

22) (Inhaltliche, aber nicht mathematische) Fortsetzung von Aufgabe 21): Jene Just-In-Schüler, welche Justins Flirtmediations-Kurs mit Auszeichnung bestanden haben (theoretisch wie auch praktisch), flirten täglich gar bis zu zwei(!) Stunden (und stören damit den Unterricht resp. die diesem immanenten Damen ihres Entzückens, schlimm-schlimm!), wozu Herr "$\mathbb{R}^3$ Wallner" ebenso ein Modell erstellt hat, Details:
$y = \varphi(x) = \frac{21}{1600}\cdot x^6 + \frac{63}{640}\cdot x^4 + \frac{13}{200}$; $\Omega=[0;2]$
Bearbeite *mutatis mutandis* die "*gleichen*" Aufgabenstellungen als in Aufgabe 22), wobei anstelle von 87 jetzt nur mehr von 15 Just-In-Schülern auszugehen ist [Jaja, am Gipfel ist es einsam, obwohl: Über Damengesellschaft können sich Chef Justin & co (inkl. "$\mathbb{R}^3$ Wallner"!) nun wirklich nicht beklagen.☺].

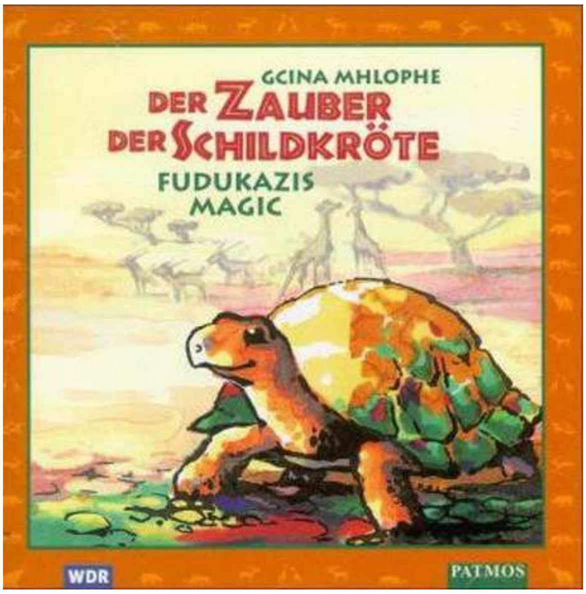
23) Julie sagt sich nach der Matura: Bam, ich kauf´ mir einen Ford. ☺
Sie hat dazu recherchiert, dass das "Lebensalter" eines Fords als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{7}{10935}\cdot x^6 + \frac{1}{243}\cdot x^3 + \frac{43}{180}$ über dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ beschrieben wird.
a) Weil sie als AHS-Maturantin zum kritischen Denken motiviert wurde, kontrolliert sie freilich zuerst, dass φ auch wirklich eine Dichtefunktion über $\Omega=[0;3]$ ist. Nimm dir an Julie ein Beispiel und checke dies auch!
b) Wie alt wird ein Ford modellgemäß durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Jahren an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Jahren angeben)!
d) Bei wie vielen von 88 Fords sollte die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

24) Sandra befolgt nach der Matura den folgenden weisen Rat eines alten Mannes: "Madl, kauf´ da a Radl." Sie hat dazu recherchiert, dass das "Lebensalter" eines Puch-Radls als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = -\frac{65}{4096}\cdot x^3 + \frac{165}{2048}\cdot x^2 + \frac{19}{256}$ über dem Ereignisraum $\Omega=[0;4]$ beschrieben wird.

a) Weil sie als AHS-Maturantin zum kritischen Denken motiviert wurde, kontrolliert sie freilich zuerst, dass φ auch wirklich eine Dichtefunktion über $\Omega=[0;4]$ ist. Nimm dir an Sandra ein Beispiel und checke dies auch!
b) Wie alt wird ein Puch-Rad modellgemäß durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Jahren an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Jahren angeben)!
d) Bei wie vielen von 41 Puch-Rädern sollte die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

25) Mary überlegt sich nach der Matura ernsthaft, nach Minnesota zu ziehen. Dazu informiert sie sich aber klarerweise zuerst über die Lebensqualität ebendort und stösst auf das folgende stochastische Modell: Die Lebensdauer der Bürger/innen des US-Bundesstaats Minnesota ist als in Jahrhunderten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{21}{5}\cdot x^6 + \frac{3}{10}\cdot x + \frac{1}{4}$ verteilt.
a) First of all Mary checks, if φ is indeed a density funktion. Check this too! ☺
b) Derive the average life expectancy μ (Transform the result into years!)!
c) Derive the standard deviation σ too (Transform the result into years either!)!
d) Mary thinks about moving to "Charlottesvillage", a new town in Minnesota (Attention! Don´t confuse it with "Charlottesville", which lies in Virginia!) with 640 citizens. How many of them live longer than $\mu-\sigma$, but shorter than $\mu+\sigma$ (according to the model!)?

26) Omar bekommt als (eines von vielen!) Maturageschenk(en) das nebenstehend abgebildete Hörspiel und will sich deshalb eine Schildkröte kaufen (wenn sie ihn vermutlich auch überleben wird … ☹). Er bringt in Erfahrung, dass die von ihm favorisierte Gattung bis zu 200 Jahre alt wird. Detailliert(er) sieht die Sache mathematisch betrachtet wie folgt aus: Die Lebensdauer ist als in Jahrhunderten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;2]$ nach der Dichtefunktion φ mit der folgenden Funktionsgleichung verteilt: $y = \varphi(x) = -\frac{21}{2560} \cdot x^5 + \frac{15}{32} \cdot x + \frac{3}{40}$



   a) Warum liegt hier eine Dichtefunktion einer stetigen ZV mit $\Omega=[0;2]$ vor?
   b) Berechne die durchschnittliche Lebensdauer μ einer solchen Schildkröte in Jahren!
   c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (ebenso in Jahren anzugeben)!
   d) Bei wie vielen von 82 Schildkröten sollte die Lebensdauer um höchstens σ von μ abweichen?

27) Alina geht nach China, zumindest für eine Weile (nach der Matura). Was die Dauer des von ihr angestrebten Lehrgangs betrifft, ist diese als in Jahrzehnten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y=\varphi(x)=-\frac{7}{1458} \cdot x^5+\frac{5}{81} \cdot x^3+\frac{1}{9}$ verteilt.
   a) Begründe, warum es sich bei φ um eine Dichtefunktion über $\Omega=[0;3]$ handelt.
   b) Berechne die durchschnittliche Studiendauer μ!
   c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (Resultat in Monaten anzugeben)!
   d) Bei wie vielen von 178 Studenten sollte die Studiendauer um höchstens σ von μ abweichen?

28) Beim händischen (old school, but good!) Schreiben von Liebesbriefen neigt Burli (welcher dafür stets eine Stunde benötigt) dazu, ab einem gewissen Zeitpunkt zu schmieren, fetzen, … (Eh scho wissen: Schlaganfallschrift!☹). Nun wurde er von Big Brother (George Orwell lässt grüßen!) überwacht, was das folgende stochastische Modell hervorbrachte: Der "CSI" (central Schmier-Index!) ist als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = -\frac{7}{4} \cdot x^4 - \frac{13}{5} \cdot x + \frac{39}{20}$ verteilt.
   a) Begründe, warum es sich bei φ um eine Dichtefunktion über $\Omega=[0;1]$ handelt.
   b) Berechne den durchschnittlichen "CSI" μ (Ergebnis in Minuten angeben)!
   c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (Resultat ebenso in Minuten anzugeben)!
   d) Bei wie vielen von 43 Liebesbriefen sollte der "CSI" um höchstens σ von μ abweichen?

29) (The) Kevin in the woods … ☺
Kev-Boy hat zahlreiche Aufführungen "seines" Films *The cabin in the woods* auf folgendes Phänomen hin untersucht (freilich höchst wissenschaftlich!): Er interessierte sich für die innerhalb der zwei Stunden Filmlänge verstrichene Zeitspanne bis zum ersten Erschrecken ("CSI": Cabin(Kevin)s Schock-Index☺) und erstellte auf Basis breit angelegter empirischer Forschungen das folgende mathematische Modell: Der in Stunden gemessene "CSI" ist als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;2]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{7}{16} \cdot x^3 - \frac{15}{16} \cdot x^2 + \frac{7}{8}$ verteilt.

   a) Verifiziere zunächst, dass φ eine Dichtefunktion ist!
   b) Berechne den durchschnittlichen "CSI" (μ) in Minuten!
   c) Ermittle auch die Standardabweichung σ von X (ebenso in Minuten anzugeben)!
   d) Zeige die Gültigkeit der σ-Regel $P(|X-\mu|<\sigma)=615‰$!

30) Utopie-Sophie studiert nach der Matura *Technische Mathematik* und schreibt schon bald ihren ersten Übungstest in einem der einführenden Proseminare, und dies zusammen mit 73 Kommilitionen (auch aus Parallelübungsgruppen). Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass die Arbeitsdauer beim ersten Proseminar-Test als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = -\frac{182}{25} \cdot x^6 + \frac{147}{20} \cdot x^4 + \frac{57}{100}$ verteilt.

a) Kontrolliere, dass φ auch alle Eigenschaften einer Dichtefunktion aufweist!
b) Wie lange arbeitet ein Student gemäß diesem Modell durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Minuten an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Minuten angeben)!
d) Bei wie vielen der insgesamt teilnehmenden Studenten (inkl. Utopie-Sophie!) sollte die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

31) Auch Utopia-Dominica studiert nach der Matura Mathematik, aber im Studienzweig Lehramt für Höhere Schulen (mit Julie* als Studienkollegin, zumindest im "Zweitfach" *Geschichte*). Bei ihrem ersten (schriftlichen) "Kolloquium" (aus Linearer Algebra) hat Dominica ebenso wie ihre 76 ebenso teilnehmenden Kommilitionen zwei Stunden Zeit, wobei man aus Erfahrung weiß, dass die Arbeitsdauer beim ersten "LinAlg-Kolloquium" als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;2]$ nach der Dichtefunktion φ mit folgender Funktionsgleichung verteilt ist:
$y = \varphi(x) = -\frac{1659}{16000} \cdot x^5 + \frac{33}{80} \cdot x^3 + \frac{57}{250}$ verteilt.

a) Überprüfe, dass φ tatsächlich alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
b) Wie lange arbeitet ein Student gemäß diesem Modell durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Minuten an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Minuten angeben)!
d) Bei wie vielen der insgesamt teilnehmenden Studenten (inkl. Utopia-Dominica!) sollte die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

32) Marietta macht im Laufe ihres Studiums ein Auslandsjahr an der Sibirischen Föderalen Universität Krasnojarsk (damit Sandra auch genau informiert ist, folge sie bitte dem Link http://www.sfu-kras.ru/de/presentation_de), welche rechts abgebildet ist. Statistiken belegen, dass speziell solch ein Auslandsjahr nur etwas für besonders Hartgesottene ist (Nota bene: Marietta ist zwar ein stilles Wasser, aber sicher eine der härtesten "Kampfgössn" im Rahmen dieses Auslandsjahrs!☺), wobei die stochastischen Details wie folgt aussehen:

Die in Jahren gemessene Verweildauer ist stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{84}{25} \cdot x^6 + \frac{8}{5} \cdot x^3 + \frac{3}{25}$ verteilt.

a) Überprüfe, dass φ tatsächlich alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
b) Wie lange hält ein Student gemäß diesem Modell durchschnittlich (μ) durch? Gib das Resultat in Tagen (Gehe von keinem Schaltjahr aus!) an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Tagen angeben)!
d) Bei wie vielen der insgesamt (inkl. Marietta!) 51 teilnehmenden Studenten sollte die Verweildauer modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

33) Claudia und Gloria (DIE bff schlechthin!) ziehen mit Beginn des WS 2014/15 in eine Zweier-WG. An und für sich vertragen die beiden Damen sich gut, wäre da nicht das "Badewannen-Problem": Claudia pflegt zwecks Entspannung (als Kontrast zum Studium) oft ziemlich lange die Badewanne zu okkupieren, was Gloria im Laufe der Zeit teils ziemlich nervt, da dann nicht einmal das Verwenden der Dusche möglich ist. Also stellt W. Gloria eine Statistik auf und komprimiert die Daten zu einem stochastischen Modell, welches wie folgt aussieht: Jene stetige Zufallsvariable X, welche die in Stunden gemessene Bade(wannen)zeit Claudias angibt, kann durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{77}{39366} \cdot x^6 - \frac{25}{324} \cdot x^2 + \frac{13}{36}$ und dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ beschrieben werden. Berechne Claudias durchschnittliche Badedauer μ (in Minuten), die zugehörige Standardabweichung σ (ebenso in Minuten) und verifiziere nebst der Dichtefunktionencharakteristika auch die σ-Regel $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 51\%$!

---

*: Ab 2020 unterrichten die beiden Damen (abgesehen von karenzbedingten Unterbrechungen) vierzig Jahre lang gemeinsam am GRgXXI, wo Dominica ja schon sechs glückliche Jahre verbracht hat. ☺

34) (Inhaltliche, aber nicht mathematische) Fortsetzung von Aufgabe 33): Gloria und die nach langem Verhandeln letztendlich auch einverstandene Claudia schaffen sich in ihrer Zweier-WG eine Katze an (welche sichtlich ebenso gerne im Bad verweilt wie Claudia!☺), welche aus einer Züchtung von Katzen stammt, die ganz besonders alt zu werden pflegen. Die mathematischen Details sehen wie folgt aus: Die Lebensdauer einer "CAT" (Claudia-Andrea-Tier ☺) ist als in Jahrzehnten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ (!) nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{4}{243}\cdot x^3 - \frac{4}{45}\cdot x^2 + \frac{22}{45}$ verteilt.

a) Überprüfe, dass φ tatsächlich alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
b) Wie lange wird eine Katze dieser Rasse durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Jahren an!
c) Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Jahren angeben)!
d) Bei wie vielen von 31 Katzen dieser Rasse sollte die Lebensdauer modellgemäß um maximal σ von μ abweichen?

Zur Erinnerung: Nebst der 23 (20 in einem File, 3 zusätzliche in je einem separaten File!) Dichtefunktionen aus den Übungen für die 1. Schularbeit sowie der 34 hier vorliegenden Übungen sind auch unter dem Link http://matheprof.at/8A201213DiFuWh.htm noch 35 Übungsaufgaben zu finden!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Jänner 2013. Dr. R. Resel, eh.