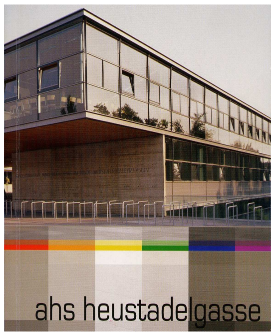

# Übungsbeispiele für die dreistündige Schularbeit sowie für die schriftliche Matura

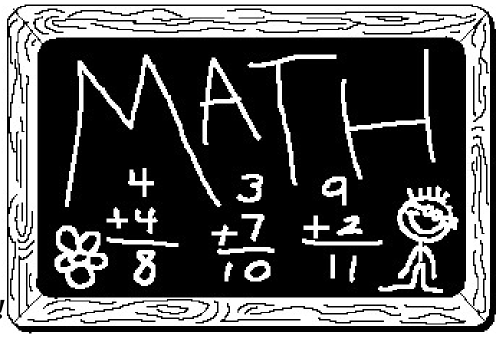
## [8B (gymnasialer Teil), 2013/14]




*Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der* **Analytischen Geometrie der Ebene** *ein Kapitel der 5. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für* ***Maturabeispiele*** *sind.*



***ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!***




1) Das Viereck ABCD[A(75|0), B(0|25), C(–50|0), D($x_D$|–100)] ist ein Viereck, dessen Diagonalen aufeinander normal stehen.

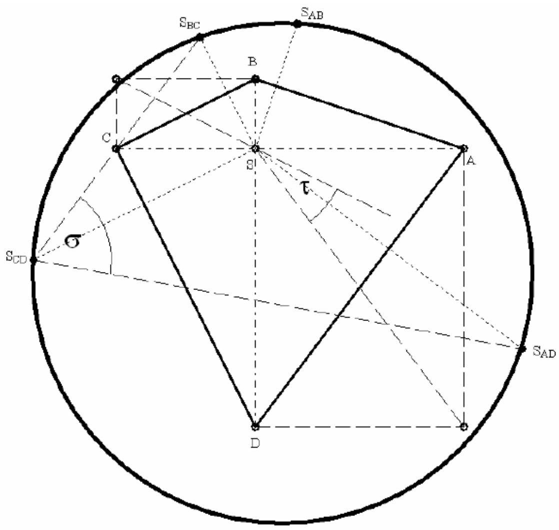
a) Wie lautet aufgrund dieser Basisinformation $x_D$? Begründe!

b) Welche besonderen Vierecke mit aufeinander normal stehenden Diagonalen hast du im Unterricht kennengelernt? Nenne wichtige Eigenschaften dieser Vierecke!

c) Spiegle – wie in der nebenstehenden Abbildung illustriert – den Diagonalenschnittpunkt S an den Seiten des Vierecks und verifiziere anhand des vorliegenden Vierecks den folgenden Satz der Elementargeometrie:

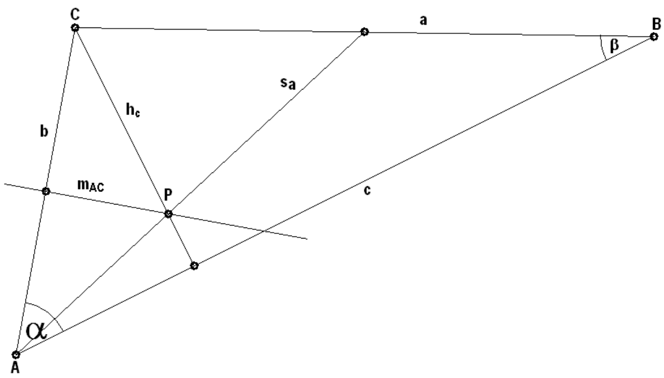
SATZ. *Spiegelt man den Diagonalenschnittpunkt eines Vierecks mit aufeinander normal stehenden Diagonalen an den Seiten des Vierecks, so liegen die gespiegelten Punkte auf einem Kreis.*

d) Ergänzt man die rechtwinkligen Dreiecke ΔADS und ΔBCS zu Rechtecken, so schließen die durch S gehenden Diagonalen einen spitzen Winkel τ ein (siehe Abbildung!). Bestätige am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, dass für τ und den Winkel $\sigma = \angle S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ die Beziehung $\boxed{\sigma + \tau = 90°}$ gilt.



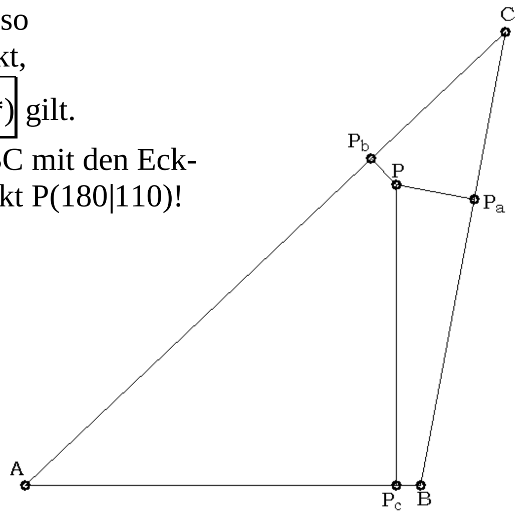

2) In nebenstehender Abbildung schneiden einander $h_c$, $m_{AC}$ und $s_a$ in einem Punkt. Diese Eigenschaft gilt nicht für alle Dreiecke, was folgender Lehrsatz beschreibt:

**SATZ.** Gilt in einem Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $\overline{AB} = c$ und $\overline{BC} = a$ sowie den Innenwinkeln $\alpha = \angle CAB$ und $\beta = \angle ABC$ die Beziehung $\cos\alpha = \sqrt{\frac{a\cdot\cos\beta}{2c}}$, so schneiden einander die Höhe $h_c$, die Streckensymmetrale $m_{AC}$ und die Schwerlinie $s_a$ in einem Punkt P.



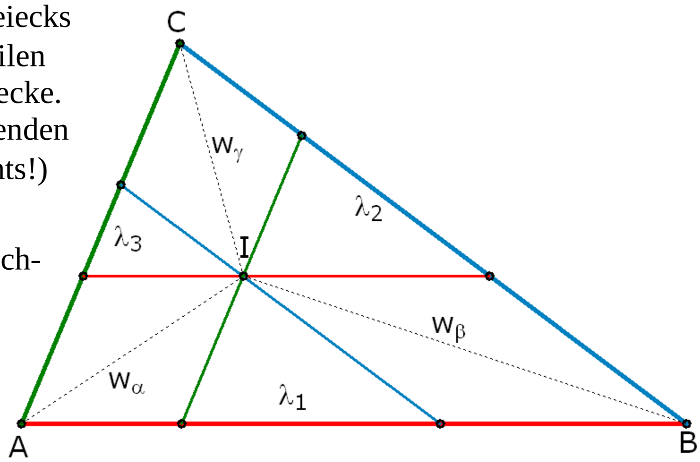

Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(1200|600), C(112|616)]!

3) Legt man durch drei Punkte der Seiten eines Dreiecks Normale, so schneiden einander die drei Normalen genau dann in einem Punkt, wenn $\boxed{\overline{AP_c}\cdot\overline{AB}+\overline{BP_a}\cdot\overline{BC}+\overline{CP_b}\cdot\overline{CA}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2\right)\ (*)}$ gilt.
Verifiziere diesen Lehrsatz anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC$ mit den Eckpunkten A(0|0), B(275|0) und C(400|300), und zwar für den Punkt P(180|110)!
Zusatz:
Für die Streckensymmetralen ist der Satz trivial.
Für die Höhen nimmt die linke Seite von (*) die Form $bc\cdot\cos\alpha+ac\cdot\cos\beta+ab\cdot\cos\gamma$ an. Zeige dies und beweise den Satz für diesen Spezialfall!

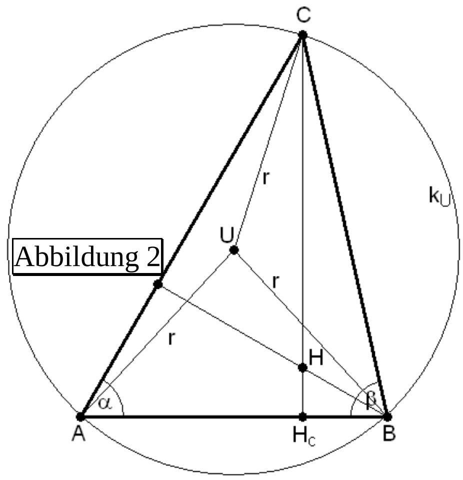



4) Bezeichnet $U_c$ den Spiegelpunkt des Umkreismittelpunkts U eines spitzwinkligen Dreiecks $\Delta ABC$ an der Seite c, so gilt die allgemeingültige Formel $\overline{CU'}^2=a^2+b^2-c^2+r^2$, worin (wie üblich) $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ die Seitenlängen des Dreiecks sowie r den Umkreisradius bezeichnen/t.
Verifiziere diese Formel anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC$[A(–6|–5), B(12|1), C(8|9)]!

5) Legt man durch den Inkreismittelpunkt eines Dreiecks $\Delta ABC$ Parallele zu den Dreieckseiten, so unterteilen diese das Dreieck in drei Rauten sowie drei Dreiecke. Für die auf den Seiten des Ausgangsdreieck liegenden Seitenlängen $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\lambda_3$ (siehe Abbildung rechts!) gilt dann (wobei – wie üblich – $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ die Seitenlängen des Dreiecks bezeichnet) die Summenformel $\boxed{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}}$.
Verifiziere diese Formel anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC$[A(0|0), B(1134|0), C(270|648)]!




6) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ (mit den üblichen Beschriftungen wie in Abbildung 2) gilt die Formel $\overline{H_cH}=2r\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Überprüfe dies am konkreten Dreieck $\Delta ABC$[A(0/0), B(168/0), C(48/64)].




7) Für den Flächeninhalt F jedes Vierecks gilt die Formel $F=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)\right|$. Bestätige dies durch Triangulierung für das konkrete Viereck ABCD [A(0/0), B(7/1), C(5/6), D(3/7)]!

8) *Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, dessen vier Seiten Sehnen eines Kreises sind, woraus folgt, dass es sich dabei um ein Viereck mit einem Umkreis handelt [was keine Selbstverständlichkeit ist, wie das Gegenbeispiel aller Parallelogramme oder nicht gleichschenkliger Trapeze (Wie ist dies bei Deltoiden? Begründe!) zeigt!].*

Für jedes Sehnenviereck ABCD mit den Seitenlängen $a=\overline{AB}$, $b=\overline{BC}$, $c=\overline{CD}$ und $d=\overline{AD}$ gilt für den Flächeninhalt F die Formel $\boxed{F=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\left[(ac+bd)^2+(ad+bc)^2\right]-\left(a^2-b^2\right)^2-\left(c^2-d^2\right)^2}}$.

**Verifiziere diese Formel für das Sehnenviereck ABCD[A(1|3), B(12|6), C(13|11), D(6|18)].**
**Zeige zunächst, dass die Punkte A, B, C und D überhaupt auf einem Kreis liegen!**

9) … und noch ein wunderschöner Lehrsatz aus der ebenen Elementargeometrie, alsdann:

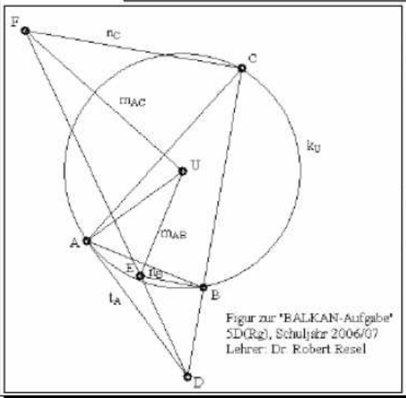
**Satz.** Bezeichnet F den Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit den Innenwinkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sowie $F'$ den Flächeninhalt seines Höhenfußpunktdreiecks, so gilt die Gleichung $\boxed{F' = 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot F}$.

Verifiziere diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(140|0), C(120|60)]$!

Die Aufgaben 10) bis 15) entsprechen den folgenden sechs aufgelisteten Übungsaufgaben "W6" bis "W11" aus dem Förderkurs einer "früheren" fünften Klasse:

10) W6)

EINE WEITERE ÜBUNGSAUFGABE ***(aus dem Balkan!)*** FÜR DIE 5D(Rg), 2006/07




In nebenstehender Figur ist ein allgemeingültiger Lehrsatz illustriert, demzufolge **der Schnittpunkt D** der Tangente $t_A$ an den Umkreis $k_U$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit der Gerade $g_{BC}$, **der Schnittpunkt E** der Streckensymmetrale $m_{AB}$ mit der Normalen $n_B$ auf $g_{BC}$ durch B sowie **der Schnittpunkt F** der Streckensymmetrale $m_{AC}$ mit der Normalen $n_C$ auf $g_{BC}$ durch C stets **kollineare Lage** aufweisen.

Verifiziere diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-55|-7), B(53|-43), C(41|41)]$!

[Lsg.: $U(5|-7)$, $D(-55|713)$, $E(-10|-52)$, $F(-15|33)$]

11) W7) Quelle der nächsten Aufgabe (deren Textbox – etwas verkrampft – von Mr. King "doppelt bewacht" wird!): →→→→
Du sollst diesen für den Vormittagsunterricht zweifelsohne zu anspruchsvollen Beweis ja auch lediglich durch eine Verifikation anhand des folgenden Dreiecks $\Delta ABC$ ersetzen: $\Delta ABC[A(-2|-6), B(7|-3), C(5|1)]$

Heustadelgasse BG-BRG-BORG

stadtschulrat

38. Österreichische Mathematische Olympiade 2007

Kurswettbewerb für Fortgeschrittene

12) W8) Siehe die von Alen (ähnlich motiviert wie damals beim "Teambuilding"!) "bewachte" Textbox!

Beweise:

In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$, dem Umkreisradius r sowie dem Höhenschnittpunkt H gilt die Formel $\boxed{\overline{HA}^2 + a^2 = \overline{HB}^2 + b^2 = \overline{HC}^2 + c^2 = 4r^2}$.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE [5A(G), 2001/02]

**Satz von Wallace** (*vgl. nebenstehende Abbildung!*):
Fällt man durch einen Punkt P des Umkreises eines Dreiecks $\Delta ABC$ Normale auf die Trägergeraden der Dreiecksseiten, so liegen die drei dabei entstehenden Fußpunkte $F_a$, $F_b$ und $F_c$ kollinear, also auf einer Gerade w ("WALLACE-Gerade").

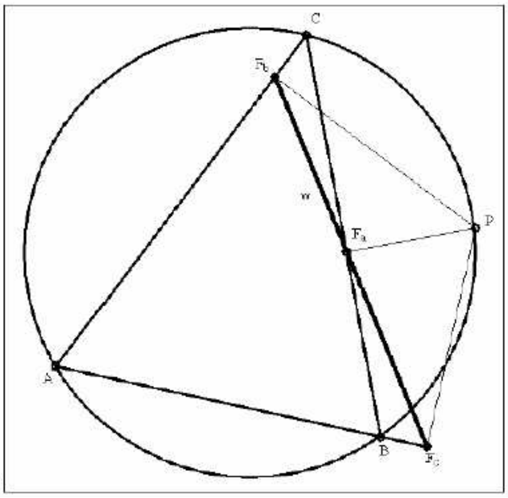
Bestätige diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-19|-24), B(26|-9), C(16|11)]$ für den Punkt $P(-19|y_P)$, wobei P nicht mit A zusammenfällt!

Lsg.: $U(1|-9)$, $r=25 \Rightarrow y_P=6$, $F_a(11|21)$,
$F_b(-4|-9)$, $F_c(-10|-21)$, w: $2x - y = 1$

ZUSATZ (freiwillig als nicht nummerierte HÜ!):

Verifiziere ebenso am vorliegenden Dreieck $\Delta ABC$, dass die Verbindungsstrecke von P mit dem Höhenschnittpunkt H des Dreiecks durch die w halbiert wird.

Lsg.: $H(21|-4)$, $g_{HP} \cap w = \{Q\} \Rightarrow Q(1|1)$, $Q = M_{HP}$



13) "W9"
↓↓↓

→ 1) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Höhenfußpunkten $H_a$, $H_b$ und $H_c$ sowie dem Schwerpunkt S gilt die Formel $\overline{SH_a}^2+\overline{SH_b}^2+\overline{SH_c}^2=\frac{1}{3}\cdot\left(\overline{AH_c}^2+\overline{CH_b}^2+\overline{BH_a}^2\right)$.

14) "W10" Bestätige diese Formel anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(90|0), C(30|60)]$!
↓↓↓↓↓

→ 2) <u>Alternative Konstruktion des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks[3]:</u>

Man wähle einen Eckpunkt (z.B. A), betrachte die durch ihn gehenden Seiten (z.B. AB und AC) und lege in den anderen Endpunkten (z.B. B und C) die Normalen auf diese Seiten, der Schnittpunkt heiße D.

***Dann ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von D mit dem gewählten Eckpunkt der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta ABC$.***

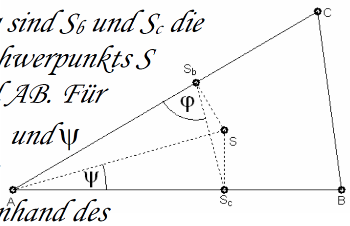
Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-7|-3), B(13|1), C(5|15)]$.

**<u>Tipp zum Üben:</u>** Da es drei Varianten gibt, ***diesen Satz*** anhand des gegebenen Dreiecks zu verifizieren, solltest du eine der beiden im Förderkurs nicht durchgerechneten Varianten (wenn die Zeit dazu ist!) im Förderkurs alleine rechnen und die andere völlig selbständig daheim!

15) "W11"
↓↓↓↓↓

→ 3) In jedem spitzwinkligen Dreieck $\Delta ABC$ mit dem Höhenschnittpunkt H, dem Höhenfußpunkt $H_c$, dem Umkreisradius r sowie den Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ gilt die Gleichung $\boxed{\overline{H_cH}=\frac{c^4-\left(b^2-a^2\right)^2}{2abc^2}\cdot r}$. Verifiziere dies anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(126|0), C(96|72)]$!

16) *In nebenstehender Abbildung sind $S_b$ und $S_c$ die Lotfußpunkte des Dreiecksschwerpunkts S auf die Dreieckseiten AC und AB. Für die eingezeichneten Winkel $\varphi$ und $\psi$ gilt dann stets die Beziehung* $\varphi+\psi=90°$. *Verifiziere dies anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0/0), B(45/45), C(30/60)]$!*




17) Entnommen aus: $\boxed{\text{Klasse: 5A(G)} \quad \textbf{3. Schularbeit (zweistündig, A)} \quad \text{20. 05. 2010}}$

*"Läßt sich der Flächeninhalt $F$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit den Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ sowie dem Winkel $\measuredangle ACB=\gamma$ durch die Formel $F=\frac{1}{4}\cdot a\cdot(a-2b\cdot\cos\gamma)$ berechnen, so schließt die Höhe $h_a$ mit der Schwerlinie $s_a$ einen halben rechten Winkel ein."*

- Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(13|0),\ C(7|4)]$:
  - Berechne die Seitenlängen $a$ und $b$ ($a$ möglichst vereinfachen)!
  - Ermittle den Cosinus von $\gamma$ (möglichst einfacher Wurzelausdruck im Nenner reicht!)!
  - Bestimme F **möglichst einfach** (Beachte die Lage des Dreiecks im Koordinatensystem.) und vergleiche das Ergebnis mit der Formel!
  - Berechne den Cosinus von $\varphi=\measuredangle(h_a,s_a)$. Welcher Wert sollte (und wird dir ja wohl auch) herauskommen?
- Welches besondere Dreieck ist $\Delta AH_aM_{BC}$ (ohne Rechnung begründen!)?

18) Ebenso entnommen aus: | Klasse: 5A(G) **3. Schularbeit (zweistündig, A)** 20. 05. 2010 |

*"Bezeichnen (wie üblich!) $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Seitenlängen eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ des Winkels $\measuredangle CAB = \alpha$ sowie $p_\alpha$ das Produkt der Normalabstände von $B$ und $C$ zu $w_\alpha$, so gilt die Formel $p_\alpha = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4}$."*
Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(21|0),\ C(5|12)]$:

- Berechne die Seitenlängen $a$, $b$ und $c$!
- Stelle eine Gleichung von $w_\alpha$ auf!
- Berechne die beiden genannten Normalabstände!
- Bilde das Produkt dieser Normalabstände (Kürzen!) und vergleiche das Ergebnis mit der Formel.

19) Detto (Nachtragstermin!):
*"Läßt sich der Flächeninhalt $F$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit den Seitenlängen $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ durch die Formel $F = \frac{b^2-c^2}{4}$ berechnen, so schließt die Höhe $h_a$ mit der Schwerlinie $s_a$ einen halben rechten Winkel ein."*

- Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(5|0),\ C(1|12)]$:
  - Berechne die Seitenlängen $b$ und $c$!
  - Bestimme F **möglichst einfach** (Beachte die Lage des Dreiecks im Koordinatensystem.) und vergleiche das Ergebnis mit der Formel!
  - Berechne den Cosinus von $\varphi = \measuredangle(h_a, s_a)$. Welcher Wert sollte (und wird dir ja wohl auch) herauskommen?
- Welches besondere Dreieck ist $\Delta AH_aM_{BC}$ (ohne Rechnung begründen!)?

20) Aussi (Nachtragstermin!):
*"Bezeichnen (wie üblich!) $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Seitenlängen eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit der Winkelsymmetrale $w_\gamma$ des Winkels $\measuredangle ACB = \gamma$ sowie $p_\gamma$ das Produkt der Normalabstände von $A$ und $B$ zu $w_\gamma$, so gilt die Formel $p_\gamma = \frac{ab(1-\cos\gamma)}{2}$."*
Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(21|0),\ C(6|8)]$:

- Berechne die Seitenlängen $a$ und $b$!
- Berechne den Cosinus von $\gamma$!
- Stelle eine Gleichung von $w_\gamma$ auf!
- Berechne die beiden genannten Normalabstände!
- Bilde das Produkt dieser Normalabstände (Kürzen!) und vergleiche das Ergebnis mit der Formel.

21) Verifiziere folgenden elementargeometrischen *Satz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-35|-55), B(65|5), C(-5|65)]$: *Werden in einem Dreieck durch einen Höhenfußpunkt Normale auf die verbleibenden Höhen und Seiten des Dreiecks gelegt, so liegen die vier entstehenden neuen Fußpunkte kollinear.*

Lösungen zu Aufgabe 21: Drei Varianten möglich: Die erste Variante mit $H_a(37/29)$ Liefert die vier Lotfußpunkte $U_1(55/-1)$, $U_2(33/13)$, $U_3(22/20)$ und $U_4(-11/41)$. Bleibt noch zu zeigen, dass $U_1$, $U_2$, $U_3$ und $U_4$ auf einer Gerade liegen. Die zweite Variante mit $H_b(-15/25)$ liefert die vier Lotfußpunkte $V_1(15/-25)$, $V_2(13/1)$, $V_3(10/40)$ und $V_4(9/53)$. Bleibt noch zu zeigen, dass $V_1$, $V_2$, $V_3$ und $V_4$ auf einer Gerade liegen. Die dritte Variante mit $H_c(40/-10)$ liefert die vier Lotfußpunkte $W_1(58/11)$, $W_2(45/10)$, $W_3(19/8)$ und $W_4(-20/5)$. Bleibt noch zu zeigen, dass $W_1$, $W_2$, $W_3$ und $W_4$ auf einer Gerade liegen. Zeige dies auf zwei verschiedene Arten!

22) Es gilt folgender *Satz* aus der Elementargeometrie:
*Die Streckensymmetrale $m_{BC}$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ schneide die Gerade $g_{AC}$ im Punkt M, die Streckensymmetrale $m_{AC}$ schneide die Gerade $g_{AC}$ im Punkt N. Ist U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta ABC$, dann liegen die Punkte A, B, M, N und U auf einem Kreis.*
Bestätige die Gültigkeit dieses Satzes anhand des Dreiecks ΔABC[A(–39|0), B(9|16), C(–15|40)].

23) In jedem Dreieck ΔABC mit den Höhenfußpunkten $H_a$, $H_b$ und $H_c$ und dem Umkreismittelpunkt U gilt folgender *Satz* aus der Elementargeometrie:
*Die Geraden* $\left\{ \begin{array}{c} g_{H_bH_c} \text{ und } g_{AU} \\ g_{H_aH_c} \text{ und } g_{BU} \\ g_{H_aH_b} \text{ und } g_{CU} \end{array} \right\}$ *stehen aufeinander normal.*
Zeige die Gültigkeit dieses Satzes anhand des Dreiecks ΔABC[A(3|2), B(63|32), C(23|62)]!

24) Vorgegeben sind die Dreiecke ΔABC[A(1|2), B(5|0), C(4|4)] und ΔA´B´C´[A´(7|14), B´(7|0), C´(14|14)].

a) Zeige, dass die Geraden $g_{AA´}$, $g_{BB´}$ und $g_{CC´}$ einander in einem Punkt schneiden (Voraussetzung des Satzes von DESARGUES).

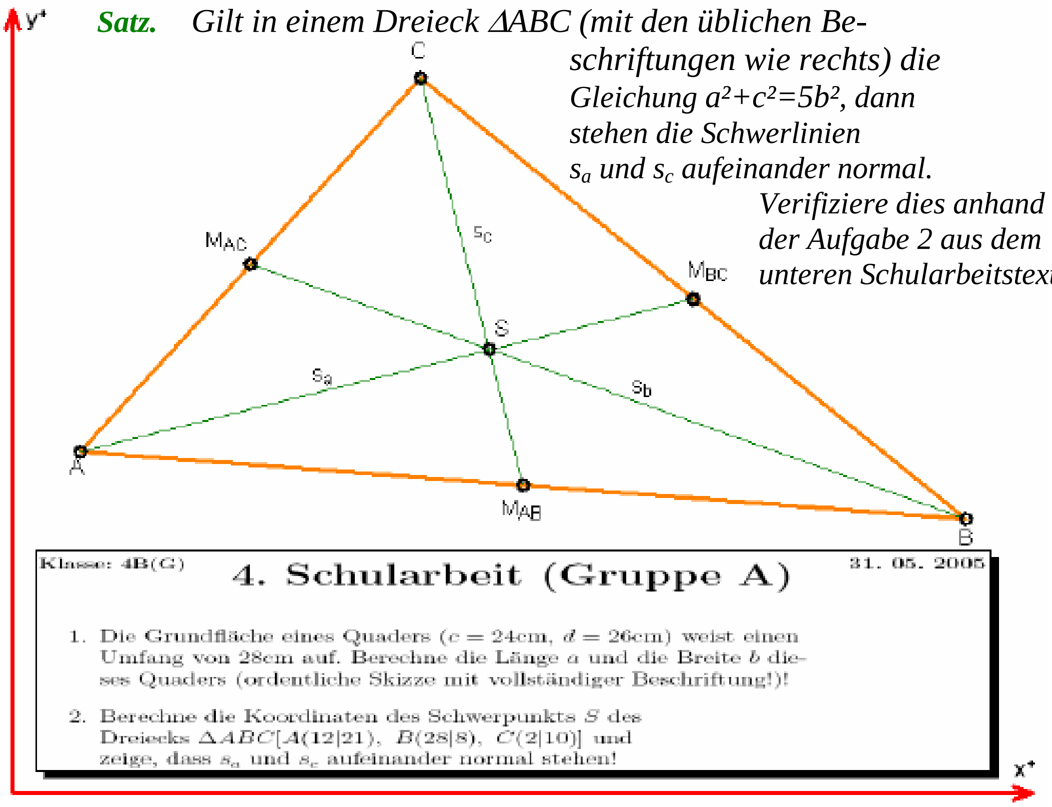
b) Zeige, dass die Schnittpunkte der Geraden $g_{AB}$ und $g_{A´B´}$, $g_{BC}$ und $g_{B´C´}$ sowie $g_{AC}$ und $g_{A´C´}$ kollinear liegen (Aussage des Satzes von DESARGUES).

25) Vorgegeben sind die Punkte A(2|0), B(3|3), C(5|0), D(8|8), E(4|0) und F(2|2), welche ein überschlagenes Sechseck formieren.

a) Zeige, dass die Eckpunkte dieses Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden liegen (Voraussetzung des Satzes von PASCAL).

b) Zeige, dass die Schnittpunkte der Geraden $g_{AB}$ und $g_{DE}$, $g_{BC}$ und $g_{EF}$ sowie $g_{CD}$ und $g_{AF}$ kollinear liegen (Aussage des Satzes von PASCAL).

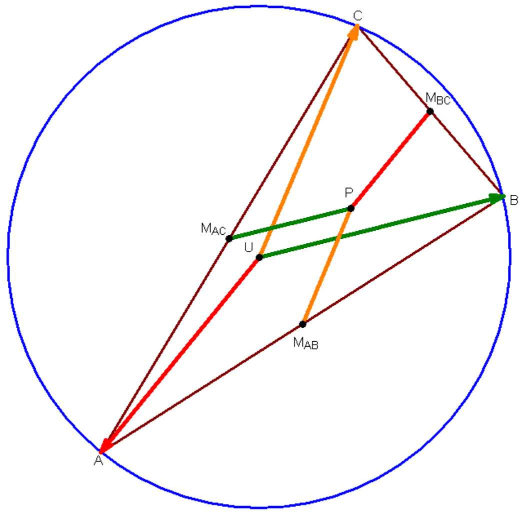
26) **Satz.** *Gilt in einem Dreieck $\Delta ABC$ (mit den üblichen Beschriftungen wie rechts) die Gleichung $a^2+c^2=5b^2$, dann stehen die Schwerlinien $s_a$ und $s_c$ aufeinander normal.*
*Verifiziere dies anhand der Aufgabe 2 aus dem unteren Schularbeitstext!*




Klasse: 4B(G) **4. Schularbeit (Gruppe A)** 31. 05. 2005

1. Die Grundfläche eines Quaders ($e = 24$cm, $d = 26$cm) weist einen Umfang von 28cm auf. Berechne die Länge $a$ und die Breite $b$ dieses Quaders (ordentliche Skizze mit vollständiger Beschriftung!)!
2. Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts $S$ des Dreiecks $\Delta ABC[A(12|21), B(28|8), C(2|10)]$ und zeige, dass $s_a$ und $s_c$ aufeinander normal stehen!

27) In nebenstehender Abbildung sind Strecken in gleicher Farbe zueinander parallel. Rechne am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-34|-36), B(32|6), C(8|34)]$ nach, dass einander die drei zu den Umkreisradien parallelen Geraden in einem gemeinsamen Punkt P ("CANTOR-Punkt") schneiden.




28) Vorgegeben ist das Dreieck $\Delta ABC[A(-2|-4), B(22|8), C(6|20)]$.

a) Berechne die Koordinaten von H, $H_a$, $H_b$ und $H_c$.

b) Berechne die Koordinaten von U, $M_{AB}$, $M_{BC}$ und $M_{AC}$.

c) Berechne die Koordinaten des Umkreismittelpunkts F des "Mittendreiecks" $\Delta M_{AB}M_{BC}M_{AC}$, den Mittelpunkt des sogenannten FEUERBACH-Kreises $k_F$. Verifiziere, dass $F=\frac{1}{2}\cdot(H+U)$ gilt!

d) Weise am konkreten Beispiel folgenden *"Klassiker"* der Elementargeometrie nach: *Neben $M_{AB}$, $M_{BC}$ und $M_{AC}$ liegen auf $k_F$ ferner auch noch $H_a$, $H_b$ und $H_c$ sowie die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH (weshalb $k_F$ manchmal auch als "Neunpunktekreis" bezeichnet wird).*

29) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Höhenfußpunkten $H_a$, $H_b$ und $H_c$ sowie den Seitenhalbierungspunkten $M_{AB}$, $M_{AC}$ und $M_{BC}$ gelten die Gleichungsketten $\overline{H_aM_{AC}} = \overline{H_cM_{AC}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}$, $\overline{H_aM_{AB}} = \overline{H_bM_{AB}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}$ und $\overline{H_bM_{BC}} = \overline{H_cM_{BC}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}$. Verifiziere dies am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(3|7), B(83|47), C(73|77)]$!

30) Ein elementargeometrischer *Satz* (Satz von PASCAL ) besagt: *Legt man in jedem Eckpunkt eines Dreiecks $\Delta ABC$ die Tangente an den Umkreis und schneidet sie mit der Trägergerade der gegenüberliegenden Dreieckseite, so liegen die drei entstehenden Schnittpunkte kollinear (PASCALsche Gerade).* Zeige die Gültigkeit dieses Satzes am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-9|-5), B(5|-5), C(12|16)]$!

31) Verifiziere folgenden elementargeometrischen *Satz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(2|-2), B(17|7), C(6|14)]$: *Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Dreieckseiten, so liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks.*

32) Verifiziere folgenden elementargeometrischen *Satz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-4|-5), B(11|-2), C(7|6)]$: *Der Abstand des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks von <u>einer Dreieckseite</u> ist halb so groß als der Abstand des Höhenschnittpunkts von dem <u>dieser Seite</u> gegenüberliegenden Eckpunkt.*

33) Gegeben ist das Dreieck $\Delta ACD[A(-40|-19), C(5|-28), D(8|-13)]$.

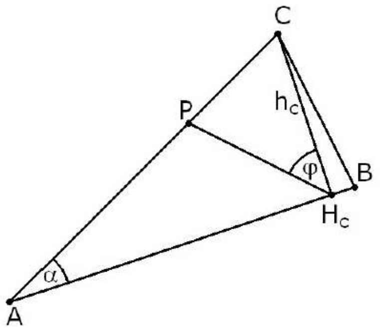
a) Zeige, dass der Punkt $F(-19|8)$ auf dem Umkreis k dieses Dreiecks liegt.

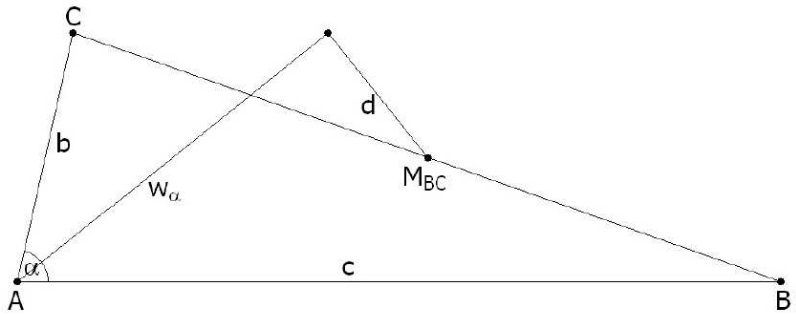
b) Berechne die fehlenden Koordinaten der auf k liegenden Punkte $B(-4|y_B<0)$ und $E(-4|y_E>0)$.

c) Verifiziere anhand des Sechsecks ABCDEF folgenden elementargeometrischen *Satz* (Satz von PASCAL): *Für jedes einem Kreis*[2] *einbeschriebenen Sechseck liegen die Schnittpunkte der Trägergeraden gegenüberliegender Sechseckseiten (also AB und DE, BC und EF sowie CD und AF) kollinear (PASCAL-Gerade).*

34) **Satz.** Das Produkt der Längen zweier Dreieckseiten ist gleich dem Produkt aus dem Umkreisdurchmesser und der Höhe auf die dritte Seite.

Kontrolliere die Gültigkeit dieses Satzes anhand des Dreiecks ΔABC[A(–8|–6), B(16|2), C(10|12)]! Die Berechnung von Höhenfußpunkten kann/soll(!) entfallen, die Verwendung der HESSEschen Abstandsformel bzw. der Vergleich zwischen elementarer und vektorieller (det!!) Flächeninhaltsformel ist nicht zuletzt als Übung zu empfehlen!




35) Entnommen aus:

Klasse: 5B(Rg) 20. 3. 2012

**2. Schularbeit (einstündig)**

Gegeben ist das Dreieck $\Delta ABC[A(-60|-45),\ B(75|0),\ C(45|60)]$.

(a) Zeige, dass der Punkt $P(10|25)$ auf der Strecke $AC$ liegt und die Eigenschaft $\boxed{\overline{CP} : \overline{PA} = \tan\alpha}$ (siehe linke obere Abbildung!) erfüllt.

(b) Unter der Voraussetzung, dass $P$ ein Punkt auf $AC$ mit obiger Eigenschaft ist, gilt stets folgender
SATZ. Ist $H_c$ der Höhenfußpunkt der Seite $AB$, so misst der Winkel $\measuredangle CH_cP$ stets exakt $45°$.
Verifiziere diesen Satz ohne Einsatz des Taschenrechners und verwende dabei für den zum Erhalt von $H_c$ notwendigen Schnitt zweier Geraden sowohl die Normalvektor- als auch die Parameterform!

36) Ebenso entnommen aus:

Klasse: 5B(Rg) 20. 3. 2012

**2. Schularbeit (einstündig)**

Überprüfe anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(123|0),\ C(9|40)]$ ausgehend von der rechten oberen Abbildung die Gültigkeit des folgenden
SATZES. Der eingezeichnete Normalabstand $d$ beträgt $d = \frac{1}{2} \cdot |b - c| \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.
Zeichne in die **Abbildung auf diesem Angabeblatt** ein, wie du $\sin\frac{\alpha}{2}$ berechnest!

37) Aus:

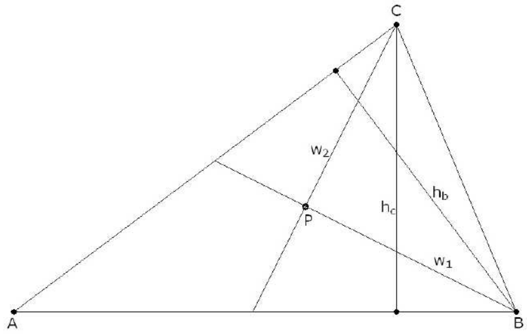
Klasse: 8D(Rg) 18. 03. 2010

**3. Schularbeit (dreistündig)**

*Mathematischer Querschnitt*

*Bezeichnet $D$ im Dreieck $\Delta ABC$ mit $\alpha = \measuredangle CAB$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ sowie $c = \overline{AB}$ den Schnittpunkt der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ mit der Dreieckseite $BC$, so gilt die Formel $\overline{AD} = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$.* **10P**
Verifiziere *diesen Lehrsatz* am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(66|0),\ B(96|72),\ C(0|0)]$. Verwende keine Dezimalzahlen, sondern Wurzelausdrücke, welche durch partielles Wurzelziehen zu vereinfachen sind.

38)

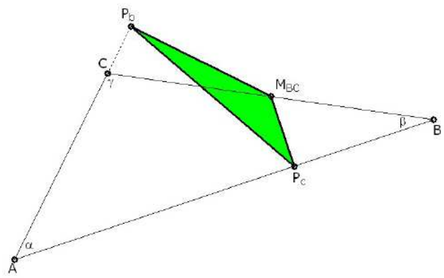



In obiger Figur bezeichnet $w_1$ die Winkelsymmetrale von $h_b$ und $c$, $w_2$ die Winkelsymmetrale von $h_c$ und $b$. Dann gilt stets $w_1 \perp w_2$.

(a) Verifiziere dies am Dreieck $\Delta ABC[A(0|0),\ B(105|0),\ C(80|60)]$ und berechne auch die Koordinaten von $P$ (siehe Figur!).

(b) Beweise den Satz mittels "Winkeljagd"!

39)




In obiger Figur ist ein Dreieck $\Delta P_C M_{BC} P_b$ abgebildet, das sich wie in der Figur illustriert aus dem Dreieck $\Delta ABC$ ableitet. Für den Flächeninhalt $\mu$ des Dreiecks $\Delta P_C M_{BC} P_b$ gilt dann die Formel $\mu = \frac{a^2}{8} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. Verifiziere dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0),\ B(18|6),\ C(4|8)]$!

40) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Seitenlängen $a = \overline{BC},\ b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$, dem Flächeninhalt F, dem Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten $H_a$, $H_b$ und $H_c$ gilt

$$\overline{H_aH} \cdot \overline{HA} = \boxed{\overline{H_bH} \cdot \overline{HB} = \overline{H_cH} \cdot \overline{HC} = \frac{(a^2+b^2-c^2)\cdot(a^2-b^2+c^2)\cdot(-a^2+b^2+c^2)}{32F^2}}.$$

Verifiziere diesen Satz $\boxed{\text{für die Höhen } h_b \text{ und } h_c}$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-4|-4),\ B(16|6),\ C(3|17)]$!

Zur Lösung:

H(7/9)

$H_b(1|11), H_c(10|3)$,

$\overline{H_bH} \cdot \overline{HB} = 2\cdot\sqrt{10}\cdot 3\cdot\sqrt{10} = 60$,

$\overline{H_cH} \cdot \overline{HC} = 3\cdot\sqrt{5}\cdot 4\cdot\sqrt{5} = 60$,

F=175

$a^2=290,\ b^2=490,\ c^2=500$

RS: 280·300·700/(32·175·175)=35·75·4/175=5·75·4/25=5·3·4=60

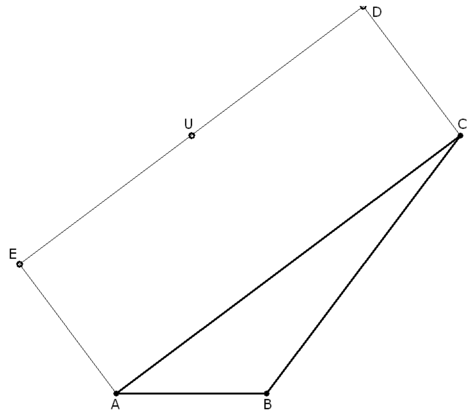
41) In jedem Dreieck gilt folgender

**SATZ.** Der Normalabstand d des Höhenfußpunkts $H_c$ von der Trägergerade $g_{AC}$ der Seite AC läßt sich (wobei – wie üblich! – $\overline{AC} = b$ sowie $\sphericalangle CAB = \alpha$ gilt!) durch die Formel $\boxed{d = \frac{b\cdot\sin(2\alpha)}{2}}$ berechnen.

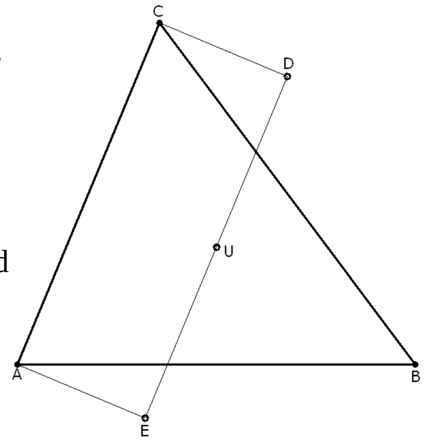
Kontrolliere diesen Satz durch Anwendung der HESSEschen Abstandsformel für das Dreieck $\Delta ABC[A(-10|-9),\ B(6|-1),\ C(-1|3)]$!

Hinweis: Die Formeln $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ sowie $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ könnten neben der "VW-Formel" durchaus hilfreich sein ... ☺

42) Erfüllen die Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ die Gleichung $5a^2+6ac+5c^2=5b^2$, dann ist der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks wie in nebenstehender Abbildung illustriert der Mittelpunkt der Seite DE jenes Rechtecks ACDE, dessen Breite $\overline{AE}=\overline{CD}$ exakt $\frac{3}{8}$ der Länge $\overline{AC}=\overline{DE}$ beträgt.
Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(14|0), C(32|24)]$!




43) Erfüllen die Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ die Gleichung $5a^2-6ac+5c^2=5b^2$, dann ist der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks wie in nebenstehender Abbildung illustriert der Mittelpunkt der Seite DE jenes Rechtecks ACDE, dessen Breite $\overline{AE}=\overline{CD}$ exakt $\frac{3}{8}$ der Länge $\overline{AC}=\overline{DE}$ beträgt.
Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)]$!




44) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Seitenlängen a=BC, b=AC und c=AB, den zugehörigen Höhen $h_a$, $h_b$ und $h_c$ sowie dem Höhenschnittpunkt gelten die folgenden Identitäten

$2\cdot\overline{AH}\cdot h_a = b^2+c^2-a^2$, $2\cdot\overline{BH}\cdot h_b = a^2+c^2-b^2$, $2\cdot\overline{CH}\cdot h_c = a^2+b^2-c^2$

Überprüfe dies für das konkrete Dreieck $\Delta ABC[A(-7/-4), B(8/1), C(4/7)]$!

45) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit dem Flächeninhalt F, den Seitenmittelpunkten $M_{BC}$, $M_{AC}$ und $M_{AB}$ sowie der Schwerlinie s durch A und $M_{BC}$ gilt die folgende Satzgruppe:
Satz 1. Die Normalabstände $d(M_{AC},s)$ und $d(M_{AB},s)$ sind gleich groß ("d").
Satz 2. Für den in Satz 1 definierten gemeinsamen Normalabstand d gilt die Formel $\boxed{d=\frac{F}{2\cdot\overline{AM_{BC}}}}$.
Überprüfe diese Satzgruppe für das konkrete Dreieck $\Delta ABC[A(0/0), B(70/10), C(50/80)]$!

46) Im Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(40|0), C(5|12)]$ – Skizze! – gelten die folgenden Bezeichnungen:
- $d_1$ bezeichnet den Normalabstand von $H_c$ zu $w_\alpha$.
- $d_2$ bezeichnet den Normalabstand von $M_{AB}$ zu $w_\alpha$.

Sonst gelten die üblichen Beschriftungen für Seitenlängen und Innenwinkel!
Bestätige am vorliegenden Dreieck die Formel $d_1\cdot d_2=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$ (Wurzelausdrücke und Brüche verwenden, Vereinfachen, Kürzen!).

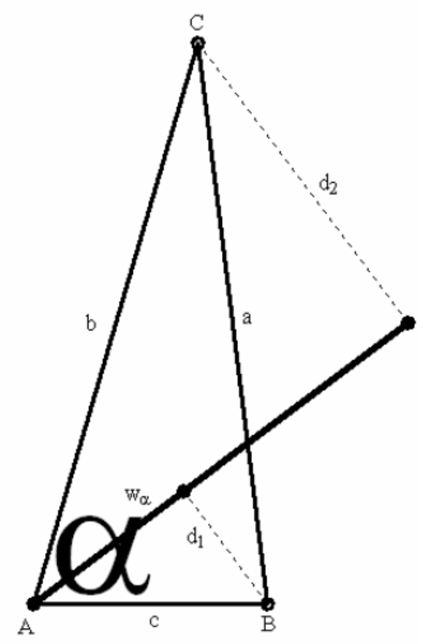
47) Entnommen aus:

**Klausurarbeit aus Mathematik**
**8D, Realgymnasium, Herbsttermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel**
**Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)**

*Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $p_\alpha$ das Produkt der Normalabstände der Eckpunkte B und C zur Winkelsymmetrale $w_\alpha$, entsprechend $p_\beta$ das Produkt der Normalabstände der Eckpunkte A und C zur Winkelsymmetrale $w_\beta$ und schließlich $p_\gamma$ das Produkt der Normalabstände der Eckpunkte A und B zur Winkelsymmetrale $w_\gamma$. Ist ferner u bzw. F der Umfang bzw. der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt* $\frac{u}{2}\cdot\sqrt{p_\alpha\cdot p_\beta\cdot p_\gamma}=F^2$.
Verifiziere *diesen Lehrsatz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(21|0), C(6|8)]$!

48) Bestätige am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(51|0), C(16|12)]$ den folgenden elementargeometrischen

**SATZ**. Ist D bzw. E der Lotfußpunkt von C auf die Innenwinkelsymmetrale $w_\beta$ bzw. $w_\alpha$ eines Dreiecks $\Delta ABC$, dann liegen die Geraden $g_{AB}$ und $g_{DE}$ zueinander parallel.




49) Mit den in nebenstehender Figur beschrifteten Größen gilt für jedes Dreieck $\Delta ABC$ mit der Abkürzung $s = d_1 + d_2$ untenstehende Gleichung. Kontrolliere dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(150|0), C(7|24)]$!

$$\boxed{s^2 = \left(a \sin \tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + bc \sin^2 \alpha}$$

50) $\Delta ABC$ sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$, dem Höhenschnittpunkt H sowie dem Umkreismittelpunkt U. Bezeichnet $\mu$ bzw. $\mu'$ bzw. $\mu''$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta ABC$ bzw. $\Delta ABH$ bzw. $\Delta ABU$, dann gilt die Formel $\boxed{\mu' + 2\mu'' = \mu}$. Verifiziere diese Formel für $\Delta ABC[A(-5|-4), B(13|2), C(9|10)]$!

51) Gegeben sei ein Dreieck mit einer beliebigen Geraden $g$ durch dessen Schwerpunkt. Liegen zwei Eckpunkte des Dreiecks auf der gleichen Seite von $g$, so ist die Summe ihrer Abstände von $g$ gleich dem Abstand des dritten Eckpunktes von $g$.

Verifiziere diesen allgemeingültigen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(11|-37), B(56|-7), C(41|68)]$, wobei g durch $D(27|-4)$ verläuft.

52)
a) Zeige, dass das Viereck $ABCD[A(-4|6), B(11|-3), C(14|6), D(11|11)]$ einen Umkreis besitzt und ferner aufeinander normal stehende Diagonalen aufweist.

b) Für Sehnenvierecke mit dieser Eigenschaft gilt der
**SATZ VON W. GÖTZ**: Der Normalabstand des Umkreismittelpunkts zu einer Seite ist stets halb so groß als die gegenüberliegende Seite.

Verifiziere diesen Satz für alle vier Varianten am vorliegenden konkreten Beispiel!

53) *Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $d_a$ bzw. $d_b$ bzw. $d_c$ den Normalabstand des Seitenmittelpunkts $M_{BC}$ bzw. $M_{BC}$ bzw. $M_{AB}$ von der Winkelsymmetrale $w_\alpha$* . Verifiziere die Formel $d_a = |d_b - d_c|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(42|40)]$!

54) *Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $d_a$ bzw. $d_b$ bzw. $d_c$ den Normalabstand des Seitenmittelpunkts $M_{BC}$ bzw. $M_{BC}$ bzw. $M_{AB}$ von der Winkelsymmetrale $w_\gamma$* . Verifiziere die Formel $d_c = |d_a - d_b|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(42|40)]$!

55) *Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $d_b$ bzw. $d_c$ den Normalabstand des Höhenfußpunkts $H_b$ bzw. $H_c$ von der Winkelsymmetrale $w_\alpha$* . Verifiziere anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(21|0), C(6|8)]$, dass die Produkte $bd_b$ und $cd_c$ (wobei – wie üblich! – $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$) gleich sind, und zwar gleich dem entsprechenden Wert des Terms $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ (wobei – ebenso wie üblich! – $\alpha = \sphericalangle CAB$!). Achtung! Verifikation mit Bruchtermen und Wurzelausdrücken, keine Dezimalzahlen!

56) *Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $d_\alpha$ bzw. $d_\beta$ bzw. $d_\gamma$ den Normalabstand des Schwerpunkts S von der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ bzw. $w_\beta$ bzw. $w_\gamma$* . Verifiziere die Formeln $d_\alpha = \frac{1}{3} \cdot |b - c| \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ , $d_\beta = \frac{1}{3} \cdot |a - c| \cdot \sin\frac{\beta}{2}$ und $d_\gamma = \frac{1}{3} \cdot |a - b| \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(63|0), C(15|36)]$!

57) *Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $d_\alpha$ bzw. $d_\beta$ bzw. $d_\gamma$ den Normalabstand des Höhenschnittpunkts H von der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ bzw. $w_\beta$ bzw. $w_\gamma$* . Verifiziere die Formeln $d_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot |b - c|$ , $d_\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot |a - c|$ und $d_\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot |a - b|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(84|0), C(24|45)]$!

58) *Im Dreieck $\Delta ABC$ bezeichne $d_a$ bzw. $d_b$ bzw. $d_c$ den Normalabstand des Seitenmittelpunkts $M_{BC}$ bzw. $M_{BC}$ bzw. $M_{AB}$ von der Winkelsymmetrale $w_\beta$* . Verifiziere die Formel $d_b = |d_a - d_c|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(42|40)]$!

59) Gilt für den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c die Formel $\boxed{F = \frac{1}{12} \cdot \left(-a^2 + 5b^2 - c^2\right)}$, dann schließen die Schwerlinien der Seiten a und c einen halben rechten Winkel ein.

a) Überprüfe dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(10|0), C(8|6)]$!

b) Kontrolliere, dass auch die Formel $F = \frac{1}{6} \cdot \left(2b^2 - ac \cdot \cos\beta\right)$ gilt und zeige die Äquivalenz zur $\boxed{\text{ersten Formel}}$ (Hinweis: Cosinus-Satz!).

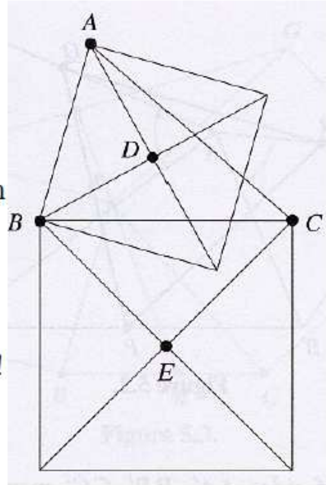
c) Welche besondere Eigenschaft weist das konkrete Dreieck ferner auf (Begründung!)?

60) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Höhenfußpunkten $H_a$, $H_b$ und $H_c$ sind die Winkel $\angle AH_bH_c$, $\angle CH_bH_a$ und $\angle ABC$ kongruent.
Bestätige diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-22|-17), B(23|-2), C(13|18)]$!

61) **<u>Schularbeitsbeispiel A1 der 5D(Rg) vom Fr, den 09. März 2007:</u>**

In jedem spitzwinkligen Dreieck $\Delta ABC$ mit dem Innenwinkel $\gamma = \angle BCA$, dem Höhenfußpunkt $H_c$ sowie den Seitenhalbierungspunkten $M_{AB}$, $M_{BC}$ und $M_{AC}$ gilt stets $\boxed{\angle M_{AC}H_cM_{BC} = \angle M_{AC}M_{AB}M_{BC} = \gamma}$.
Bestätige diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(38|0), C(6|16)]$. Berechne dazu auch **<u>das Maß dieses</u>** dreifach auftretenden **<u>Winkels</u>**! ***Fertige eine saubere Skizze an, deren ordentliche Beschriftung (inkl. Koordinatensystem!) den Zusammenhang zur Rechnung deutlich herstellen soll!***

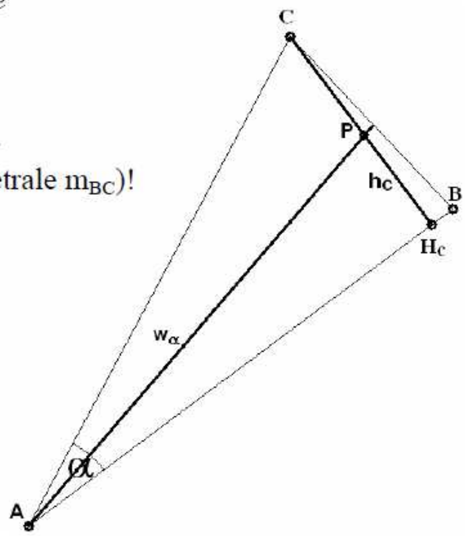
62) **Schularbeitsbeispiel der 5E vom 14. 3. 2008:**
Werden den Seiten AB und BC eines beliebigen Dreiecks $\Delta ABC$ wie aus nebenstehender Figur deutlich ersichtlich Quadrate mit den Mittelpunkten D und E aufgesetzt, so gilt stets folgender




$\boxed{\text{SATZ.}}$ Das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Geraden $g_{AC}$ und $g_{DE}$ bleibt unabhängig von der Form des Dreiecks $\Delta ABC$ immer gleich groß, sodass stets $\boxed{\overline{DE} = \overline{AC} \cdot \cos\varphi}$ gilt.

Bestätige diesen Lehrsatz für das Dreieck $\Delta ABC[A(2|8), B(0|0), C(8|0)]$ und berechne auch das Maß von φ!

63) **Schularbeitsbeispiel der 5E vom 30. 5. 2008:**
Ein Satz der Elementargeometrie besagt:
*In jedem Dreieck schneiden einander die Winkelsymmetrale eines Winkels und die Streckensymmetrale der gegenüberliegenden Dreieckseite in einem Punkt des Umkreises $k_U$.*
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC$ mit den Eckpunkten A(0|0), B(112|0) und C(40|96) anhand der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ (und damit automatisch der Streckensymmetrale $m_{BC}$)!
**Verwende dazu die Parameterdarstellung und fertige eine ordentliche Skizze an! Schreibe in Symbolform an, wie du nachweist, dass der Schnittpunkt auf $k_U$ liegt!**




64) Berechne für das Dreieck $\Delta ABC$ mit den Eckpunkten A(0|0), B(2916|2187) und C(1800|3375) die Koordinaten des gemäß der angegebenen Skizze definierten Schnittpunkts P und kontrolliere am vorliegenden konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $\boxed{\cos\alpha = \overline{H_cP} : \overline{PC}}$!

65) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Innenwinkeln $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle BCA$, dem Umkreisradius r, dem Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten $H_a$, $H_b$ und $H_c$ gilt $\overline{H_aH} \cdot \overline{HA} = \boxed{\overline{H_bH} \cdot \overline{HB} = \overline{H_cH} \cdot \overline{HC} = 4r^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$. Verifiziere diesen Satz $\boxed{\text{für die Höhen } h_b \text{ und } h_c}$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-4|-4), B(16|6), C(3|17)]$!

66) Es sei $M_{BC}$ der Mittelpunkt der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks $\Delta ABC$ mit den Höhenfußpunkten $H_b$ und $H_c$. Dann gilt stets $\angle H_cM_{BC}H_b = 180° - 2 \cdot \angle CAB$.
Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-12|-11), B(28|9), C(2|31)]$!

67) Berechne im Dreieck $\Delta ABC[A(-20|-100), B(69|-11), C(-59|69)]$ die Maße der Innenwinkel!

68) Berechne im Dreieck $\Delta ABC[A(250|-200), B(341|-18), C(-362|191)]$ die Maße der Innenwinkel!

69) Ein ganz besonders schöner Satz der Dreiecksgeometrie lautet wie folgt:
*Schneiden einander die Winkelsymmetrale $w_\alpha$, die Streckensymmetrale $m_{AB}$ und die Schwerlinie $s_b$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ in einem Punkt P, dann besteht zwischen den Seitenlängen* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Beziehung $\boxed{(a^2-b^2+c^2)^2=b^2c^2}$.
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(138|0), C(60|144)]$!

70) Ein nicht geringeres Juwel der Dreiecksgeometrie ist das folgende Theorem:
*Schneiden einander die Winkelsymmetrale $w_\alpha$, die Streckensymmetrale $m_{AB}$ und die Höhe $h_b$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ in einem Punkt P, dann gilt $\alpha=60°$.*
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(6|0), C(2|2\sqrt{3})]$!

71) *Nächste Aufgabe aus:*

**Klasse: 5E(Rg)** **24. 01. 2008**

# 2. Schularbeit (zweistündig)

Nachtragstermin für [redacted]

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

**D A T E N S C H U T Z !**

Gegeben ist das Dreieck $\Delta ABC[A(-84|-252), B(12|-124), C(76|132)]$.

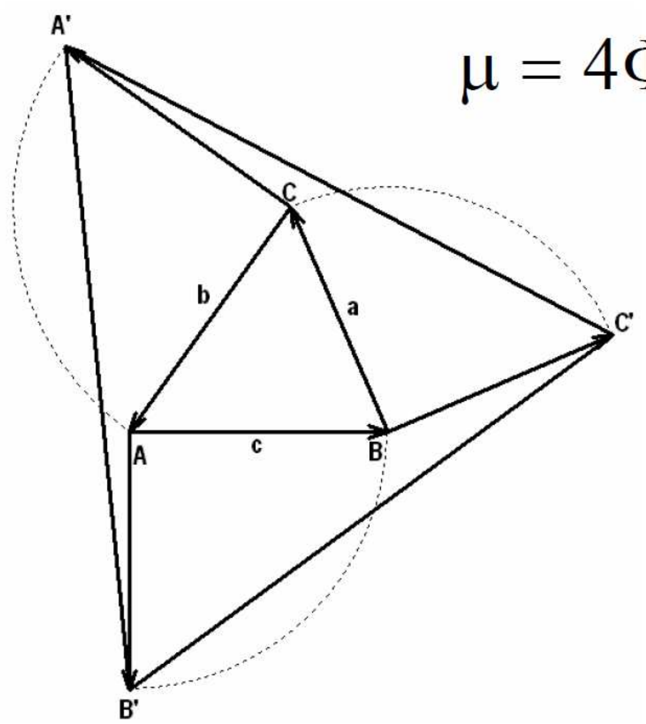
a) Berechne die Koordinaten jenes Punkts P, den man durch Schneiden der Streckensymmetrale $m_{AB}$ mit der Höhe $h_b$ erhält!

b) Berechne die Koordinaten jenes Punkts Q, den man durch Schneiden der Streckensymmetrale $m_{AC}$ mit der Höhe $h_c$ erhält!

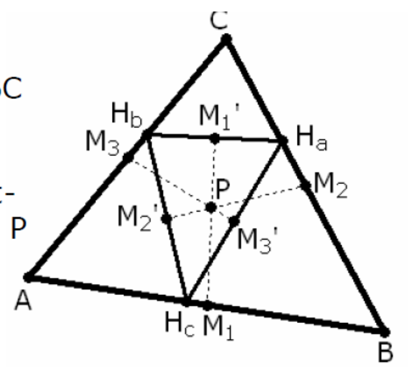
c) Zeige an diesem Beispiel die Gültigkeit des folgenden *Satzes* der Elementargeometrie: *Ist P der Schnittpunkt der Streckensymmetrale $m_{AB}$ mit der Höhe $h_b$ sowie Q der Schnittpunkt der Streckensymmetrale $m_{AC}$ mit der Höhe $h_c$, dann gilt* $\boxed{\overline{AB}\cdot\overline{AQ}=\overline{AC}\cdot\overline{AP}}$.

72) Werden die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks $\Delta ABC$ wie in der **unteren Figur (samt Beschriftung!)** durch eine 90°-Drehung um einen benachbarten Eckpunkt auf die Punkte A′, B′ und C′ abgebildet, so gilt für den Flächeninhalt $\mu$ des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ untenstehende Formel, wobei $\Phi$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta ABC$ bezeichnet. Bestätige diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(8|0), C(5|7)]$.

$$\mu = 4\Phi + \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

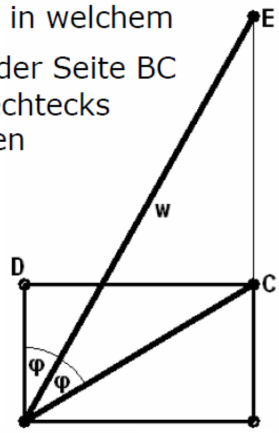



73) Verbindet man die Höhenfußpunkte eines Dreiecks $\Delta ABC$ miteinander, so erhält man das sogenannte Höhenfußpunktdreieck $\Delta H_aH_bH_c$ des Dreiecks $\Delta ABC$. Zeige, dass die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmittelpunkte der beiden Dreiecke einander in einem Punkt P schneiden (siehe Abbildung rechts!), und zwar anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(140|0)$ und $C(120|60)]$!




74) Gilt für die Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ die Gleichung $a^2+2c^2=2b^2$, dann schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle M_{BC}AB$ die Dreieckseite BC orthogonal. Verifiziere dies für das konkrete Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(169|0), C(-407|240)]$!

75) In nebenstehender Abbildung ist ein Rechteck ABCD illustriert, in welchem die Winkelsymmetrale w des Winkels ∢DAC die Trägergerade der Seite BC im Punkt E schneidet. Verifiziere am konkreten Beispiel des Rechtecks ABCD[A(−45|−30), B(3|−50), C(18|y), D] den allgemeingültigen Satz, demzufolge das Dreieck ΔACE gleichschenklig ist.

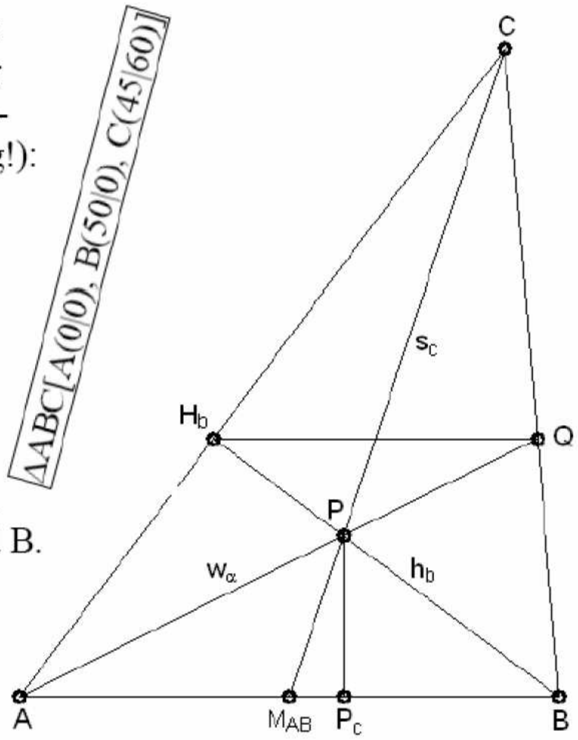



76) Ein besonders schöner Lehrsatz aus der Elementargeometrie der Ebene lautet wie folgt (siehe nebenstehende mittlere Abbildung!):

**SATZ.** Schneiden einander die Winkelsymmetrale $w_\alpha$, die Höhe $h_b$ sowie die Schwerlinie $s_c$ eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, so verläuft die Gerade durch $H_b$ und Q parallel zur Gerade durch A und B.

Überprüfe die Gültigkeit dieses Satzes an obigem Beispiel.

ΔABC[A(0|0), B(50|0), C(45|60)]




Zeige ferner, dass $\overline{AP_c} = \overline{H_bQ}$ gilt (Dabei ist $P_c$ die Normalprojektion von P auf $g_{AB}$.)!

77) *Nächste Aufgabe aus:*

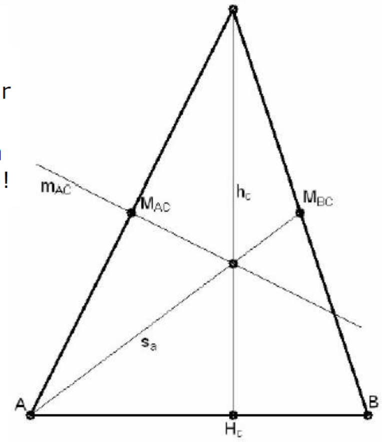
**Klausurarbeit aus Mathematik**

Klasse 8D (Realgymnasium), Haupttermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel

Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

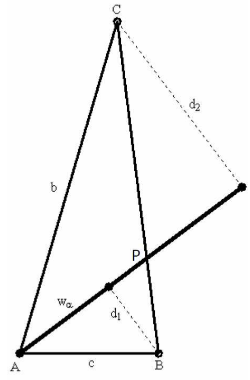
*Schneiden einander die Schwerlinie $s_a$, die Höhe $h_c$ und die Streckensymmetrale $m_{AC}$ eines Dreiecks $\Delta ABC$ in einem Punkt (siehe untere Abbildung), dann erfüllen die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Gleichung $(a^2 - c^2)^2 = b^2(3a^2 - 2b^2 - c^2)$.*
Überprüfe die Gültigkeit dieses Lehrsatzes der ebenen Geometrie am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(10|0),\ C(6|12)]$!

78) Legt man in den Eckpunkten B und C eines Dreiecks ΔABC die Tangenten an den Umkreis, so begrenzen diese zusammen mit der Seite BC ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt $\mu$ dann die Formel $\mu = \frac{1}{4}\cdot\tan\alpha\cdot a^2$ gilt, wobei wie üblich $a = \overline{BC}$ und $\alpha = ∢CAB$ gilt. Verifiziere diesen Lehrsatz der Elementargeometrie anhand des Dreiecks ΔABC mit den Eckpunkten A(−16|−18), B(17|15) und C(−7|27)!

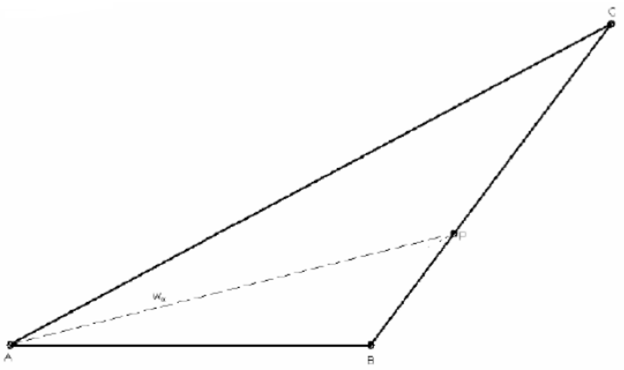


79) In nebenstehender Abbildung siehst du ein Dreieck, in welchem die Seitenlängen b und c, sowie zwei Normalabstände $d_1$ und $d_2$ eingezeichnet sind. Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt stets die Formel $\boxed{F = \sqrt{d_1 d_2 (bc - d_1 d_2)}}$

Kontrolliere dies für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(70|0), C(49|168)]! Verifiziere überdies dies die allgemeingültige Proportion $\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{BA} : \overline{AC}$ !




80) Ist P der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ mit der Seite BC im Dreieck ΔABC, dann gilt unter Verwendung der Bezeichnungen $w = \overline{AP},\ u = \overline{PC},\ v = \overline{BP},\ b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Gleichung $\boxed{w^2 = (b+u)\cdot(c-v)}$.




Verifiziere diesen Satz am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(117|0), C(195|104)]!

Zusatz: Verifiziere ebenso am vorliegenden Beispiel die Gültigkeit der Formel $\boxed{w = H(b,c)\cdot \cos\frac{\alpha}{2}}$ !

(Dabei bezeichnet H(b,c) das harmonische Mittel der Zahlen – in diesem Fall: Dreieckseitenlängen – b und c.)

81) *Ist P der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ eines Dreiecks ΔABC mit der Seite BC, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks sowie (wie üblich)* $a = \overline{BC},\ b = \overline{AC}$ sowie $c = \overline{AB}$*, dann gilt* $\overline{IP} = \dfrac{2abc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{(a+b+c)\cdot(b+c)}$*. Verifiziere dies für das konkrete ΔABC[A(0/0), B(252/0), C(72/135)]!*

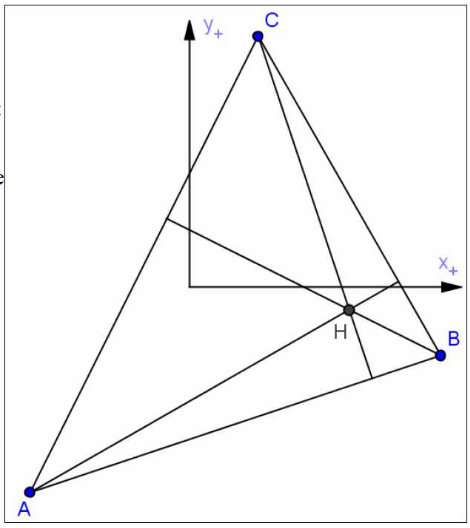
82) *Im Dreieck ΔABC bezeichne $d_\alpha$ bzw. $d_\beta$ bzw. $d_\gamma$ den Normalabstand des Umkreismittelpunkts U von der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ bzw. $w_\beta$ bzw. $w_\gamma$.* Verifiziere die Formeln $d_\alpha = \dfrac{|b-c|}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$, $d_\beta = \dfrac{|a-c|}{4\sin\frac{\beta}{2}}$ und $d_\gamma = \dfrac{|a-b|}{4\sin\frac{\gamma}{2}}$ anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(168|0), C(48|64)]!

83) Beispiel A3 der 5C(Rg), 2005/06, 2. Schularbeit:
Für jedes Dreieck ΔABC mit dem Höhenschnittpunkt H sowie den Normalabständen $d(H,g_{BC})$, $d(H,g_{AC})$ und $d(H,g_{AB})$ gilt die folgende Gleichungskette:

$d(H,g_{BC})\cdot\overline{HA} = \boxed{d(H,g_{AC})\cdot\overline{HB} = d(H,g_{AB})\cdot\overline{HC}}$

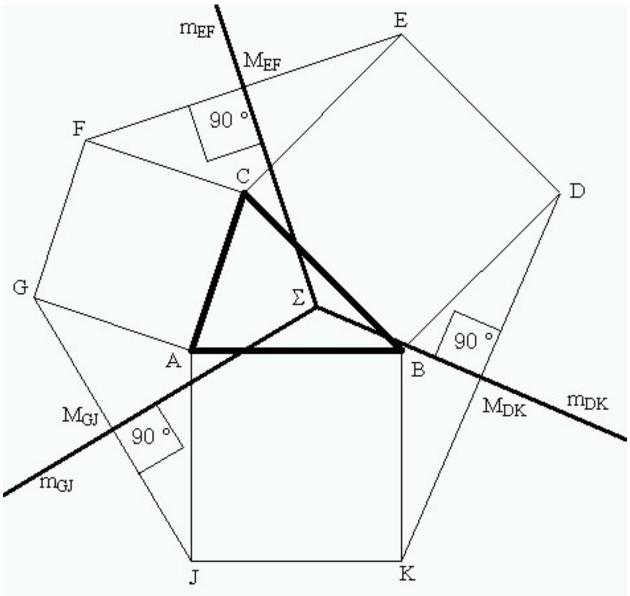
Zeige die Gültigkeit dieses Satzes für die Normalabstände $d(H,g_{AC})$ und $d(H,g_{AB})$ am Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(–7|–9), B(11|–3), C(3|11)] (siehe Abbildung!).

Zusätzliche Übung (für später): Verifiziere die Gültigkeit dieses Satzes ohne Verwendung der HESSEschen Abstandsformel unter Verwendung der Höhenfußpunkte (reicht für $H_b$ und $H_c$)!



84) Beispiel A2 der 5C(Rg), 2005/06, 2. Schularbeit: Für den Umkreisradius r jedes Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, und c und dem Flächeninhalt F gilt die Formel $r = \frac{abc}{4F}$. Bestätige diese Formel anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(2|8), B(9|1), C(11|5)]$!

85) Einem Dreieck $\Delta ABC$ wurden wie in der unteren linken Abbildung Quadrate aufgesetzt. Verifiziere am Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(72|0), C(18|54)]$ den **Satz von STARITZBICHLER** (nach der **österreichischen Mathematikerin R. STARITZBICHLER, 1921-2008**): **Die Streckensymmetralen der Strecken DK, EF und GJ schneiden einander in einem Punkt Σ (STARITZBICHLER-Punkt)**.




86) Verifiziere anhand des Dreiecks $\Delta ABC$ mit den Eckpunkten A(0/0), B(910/0), C(585/780) den folgenden Lehrsatz der Elementargeometrie:
In jedem Dreieck mit den Höhenlängen $h_a$, $h_b$ und $h_c$ sowie dem Inkreisradius ρ gilt die Gleichung $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\rho}$.

87) Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, s sein halber Umfang sowie ρ bzw. r sein In- bzw. Umkreisradius, so gilt für den geralmten Term T(z) die Gleichungskette T(a)=T(b)=T(c)=0.

$$\boxed{T(z) = z^3 - 2sz^2 + \left(s^2 + \rho^2 + 4\rho r\right)z - 4s\rho r}$$

Bestätige diesen Lehrsatz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(168|0), C(120|90)]$.

88) Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, s sein halber Umfang sowie ρ bzw. r sein In- bzw. Umkreisradius, so gilt stets die schöne geralmte Gleichung

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(s^2 - \rho^2 - 4\rho r\right)}$$

Bestätige dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(-10|8), B(14|0), C(20|18)]$!

89) Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, s sein halber Umfang sowie ρ bzw. r sein In- bzw. Umkreisradius, so gilt stets die schöne geralmte Gleichung

$$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 2s\left(s^2 - 3\rho^2 - 6\rho r\right)}$$

Bestätige dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)]$!

90) Ist s der halbe Umfang eines Dreiecks mit dem Höhenschnittpunkt H, dem Umkreismittelpunkt U sowie dem In- bzw. Umkreisradius ρ bzw. r, so gilt stets die schöne geralmte Gleichung

$$\boxed{\overline{HU}^2 = 9r^2 + 2\rho^2 + 8\rho r - 2s^2}$$

Bestätige dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(168|0), C(120|64)]$!

## *Lösungen dazu:*

87) U(84|13), r=85, I(108|36), ρ=36 (sic!), $z^3 - 420z^2 + 57636z - 42570400 = 0$
88) U(5|13)=$M_{AC}$, r=5√10, I(108|36), ρ=2√10, s=12√10
89) U(56|33), r=65, I(48|32), ρ=32 (sic!), s=168
90) U(84|–13), r=85, I(112|28), ρ=28 (sic!), s=192, H(120|90)

91) Im rechtwinkligen Dreieck $\Delta ABC$ ist $D$ der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse $AB$. $E$ ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ACB$ mit der Hypotenuse, $P$ ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle BDC$ mit der Kathete $BC$ und $Q$ ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle CDA$ mit der Kathete $AC$. Beweise, dass das Viereck $EPCQ$ ein Quadrat ist.

Die Richtigkeit dieser besonders schönen Mathematikolympiadeaufgabe soll lediglich am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(525|0), B(0|700), C(0|0)] verifiziert werden!

*Lsg.:* E(300/300), D(336|252), P(0|300), Q(300|0)

92) $w_\alpha$ bezeichne die Winkelsymmetrale des Winkels $\alpha = \angle BAC$ eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC mit der Hypotenuse AB. Ferner sei D bzw. E der Schnittpunkt von $w_\alpha$ mit der Kathete BC bzw. dem Umkreis des Dreiecks. Dann gilt stets $\boxed{\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}}$ (*).

Dies soll nun am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(6|0), B(0|8), C(0|0)] schrittweise verifiziert werden:

- Berechne die Koordinaten von D!
- Zeige, dass der Punkt E(–2|4) sowohl auf $w_\alpha$ als auch auf dem Umkreis liegt!
- Verifiziere die Produktgleichung (*)!

*Lösung:* D(0|3)

93) Sei ABC ein Dreieck mit $\angle ACB = 90°$. Die Winkelsymmetralen der Winkel BAC bzw. ABC schneidet BC im Punkt P bzw. AC im Punkt Q. Es seien M bzw. N die Fußpunkte der Normalen durch P bzw. Q auf die Seite AB. Bestimme den Winkel MCN!

Es kommt zwar nicht auf die Proportionen des in Rede stehenden rechtwinkligen Dreiecks an (d.h. der gesuchte Winkel hat für alle rechtwinkligen Dreiecke das gleiche Maß!), dennoch soll es hier genügen, das Maß des gesuchten Winkels am konkreten Beispiel des Dreieck ΔABC[A(120|0), B(0|90), C(0|0)] zu berechnen. Dafür ist aber darüber hinaus zusätzlich noch zu verifizieren, dass $g_{CM}$ bzw. $g_{CN}$ auf die Winkelsymmetrale von BAC bzw. ABC normal steht!

*Lösung:* P(0|40), Q(45|0), M(24|72), N(72|36)

94) Für jedes Dreieck gilt folgender

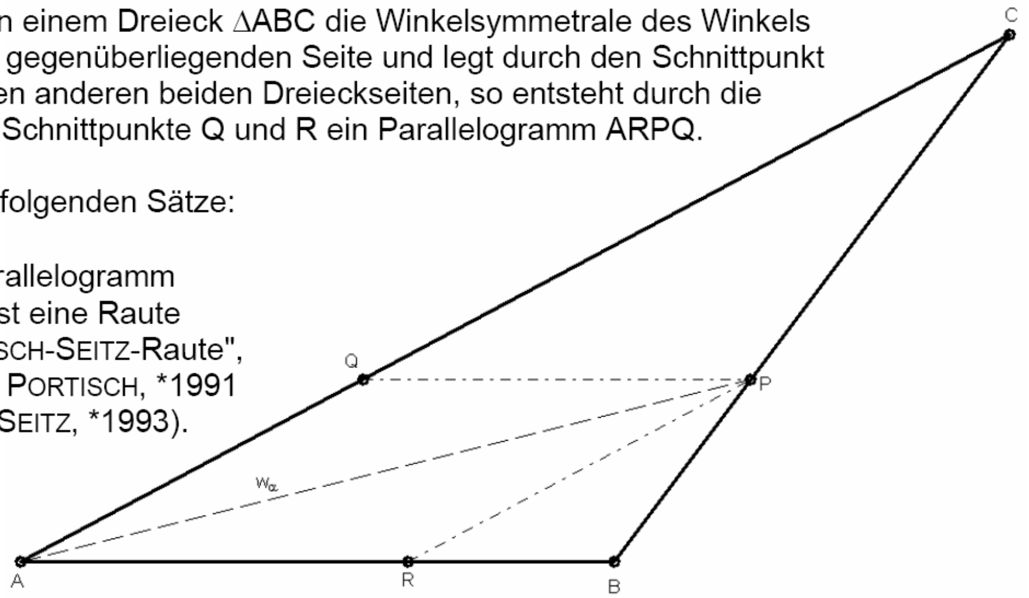
**Satz.** Der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ist auch der Inkreismittelpunkt jenes Dreiecks, das von den Höhenfußpunkten gebildet wird.

Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC[A(125|–50), B(–50|125), C(–50|–75)]!

95) Für den Abstand d des Inkreismittelpunkts I eines Dreiecks $\Delta ABC$ vom Eckpunkt C gilt (unter Verwendung der üblichen Beschriftungen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$) die allgemeingültige Formel $d = \sqrt{ab - \frac{2abc}{a+b+c}}$. Überprüfe dies anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(42|0), C(12|16)]$!

96) Schneidet man in einem Dreieck $\Delta ABC$ die Winkelsymmetrale des Winkels $\alpha = \angle CAB$ mit der gegenüberliegenden Seite und legt durch den Schnittpunkt P Parallele zu den anderen beiden Dreieckseiten, so entsteht durch die beiden weiteren Schnittpunkte Q und R ein Parallelogramm ARPQ.

Dann gelten die folgenden Sätze:

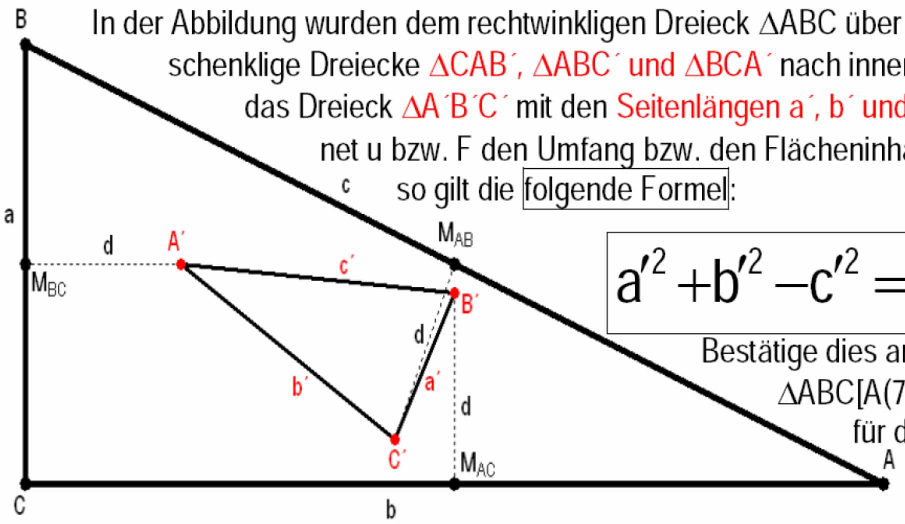



**SATZ 1.** Das Parallelogramm ARPQ ist eine Raute ("PORTISCH-SEITZ-Raute", nach S. PORTISCH, *1991 und M. SEITZ, *1993).

**SATZ 2.** Bezeichnet $\rho$ den Inkreisradius des Dreiecks $\Delta ABC$ sowie $\rho'$ bzw. s den Inkreisradius bzw. die Seitenlänge der PORTISCH-SEITZ-Raute, so gilt die Formel $\boxed{\rho' = \frac{\rho}{2} \cdot \left(1 + \frac{as}{bc}\right)}$, wobei $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$.

Verifiziere dies anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(234|0), C(390|208)]$!

97) In der Abbildung wurden dem rechtwinkligen Dreieck $\Delta ABC$ über seinen Seiten gleichschenklige Dreiecke $\Delta CAB'$, $\Delta ABC'$ und $\Delta BCA'$ nach innen aufgesetzt, wodurch das Dreieck $\Delta A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a'$, $b'$ und $c'$ entsteht. Bezeichnet u bzw. F den Umfang bzw. den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta ABC$, so gilt die folgende Formel:



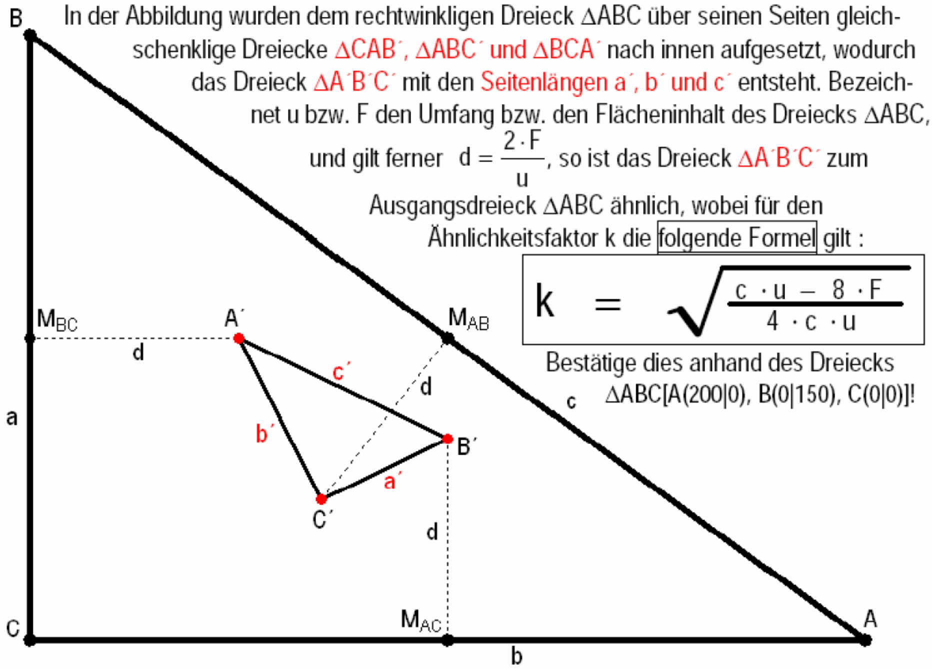

$$\boxed{a'^2 + b'^2 - c'^2 = \frac{2d}{c} \cdot (d \cdot u - 2 \cdot F)}$$

Bestätige dies anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(72|0), B(0|30), C(0|0)]$ für den Wert $d = 13$!

98) In der Abbildung wurden dem rechtwinkligen Dreieck ΔABC über seinen Seiten gleichschenklige Dreiecke ΔCAB´, ΔABC´ und ΔBCA´ nach innen aufgesetzt, wodurch das Dreieck ΔA´B´C´ mit den Seitenlängen a´, b´ und c´ entsteht. Bezeichnet u bzw. F den Umfang bzw. den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC, und gilt ferner $d = \frac{2 \cdot F}{u}$, so ist das Dreieck ΔA´B´C´ zum Ausgangsdreieck ΔABC ähnlich, wobei für den Ähnlichkeitsfaktor k die folgende Formel gilt :

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{c \cdot u - 8 \cdot F}{4 \cdot c \cdot u}}}$$

Bestätige dies anhand des Dreiecks ΔABC[A(200|0), B(0|150), C(0|0)]!




99) Setze auf die Seiten des Dreiecks ΔABC[A(0/0), B(88/0), C(66/44)] nach außen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke und verbinde die Spitzen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten. Zeige, dass die drei entstehenden Geraden einander in einem Punkt P (Polakovics-Punkt) schneiden.
Lsg.: P(60/20)

100) (a) Zeige, dass das Viereck $ABCD[A(-12|0),\ B(8|0),\ C(15|9),\ D(-20|16)]$ ein Sehnenviereck ist.

(b) Legt man durch einen Eckpunkt eines Sehnenvierecks Normale auf die dem Eckpunkt gegenüberliegenden Viereckseiten sowie die den Eckpunkt nicht enthaltende Diagonale, so liegen die Fußpunkte dieser Normalen auf einer Gerade ("Wallace-Gerade" dieses Eckpunkts). Bestätige diesen Lehrsatz für alle vier Eckpunkte.

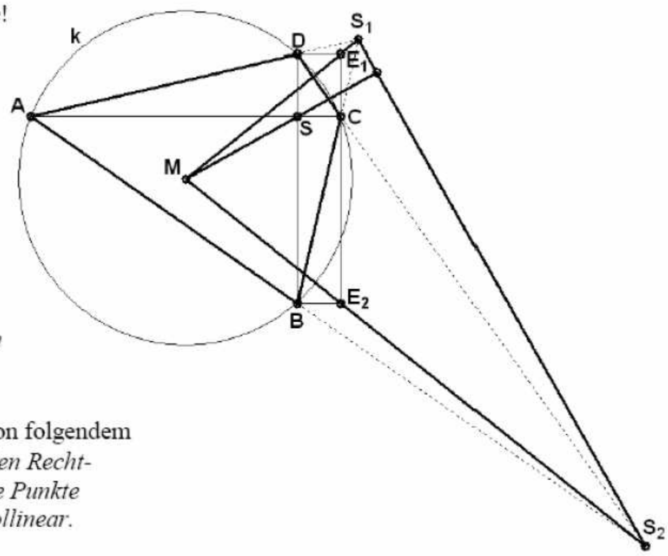
(c) Verifiziere, dass die vier Wallace-Geraden aus (b) einander in einem Punkt ("Wallace-Punkt") schneiden.

101) Das Viereck ABCD[A(–24|3), B(21|–12), C(24|3), D($x_D$|12)] ist ein Viereck, dessen Diagonalen aufeinander normal stehen.

a) Wie lautet aufgrund dieser Basisinformation $x_D$? Begründe!

b) Erkläre, warum das Viereck ABCD ein Sehnenviereck ist und gib (inkl. Begründung!) die Koordinaten des Umkreismittelpunkts M an!

c) Ergänze das Viereck ABCD wie in nebenstehender Abbildung illustriert zum *vollständigen Vierseit* $ABCDSS_1S_2$ und verifiziere anhand des vorliegenden Vierecks den folgenden Satz der Elementargeometrie:
Satz. *Ist ABCD ein Sehnenviereck mit aufeinander normal stehenden Diagonalen und $ABCDSS_1S_2$ das zugehörige vollständige Vierseit mit dem Diagonalenschnittpunkt S und den verbleibenden Ecken $S_1$ und $S_2$, so steht die Gerade durch M und S auf die Gerade durch $S_1$ und $S_2$ normal.*




d) Kontrolliere ferner am konkreten Beispiel die Gültigkeit von folgendem
Satz. *Ergänzt man die Dreiecke ΔSCD und ΔSBC zu den Rechtecken $SCE_1D$ und $SBE_2C$, dann liegen sowohl die Punkte M, $E_1$ und $S_1$ als auch die Punkte M, $E_2$ und $S_2$ kollinear.*

Lsg.: *$S_1(26/13)$*
*$S_2(30/-15)$*

102) Im Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen a, b und c sowie dem Flächeninhalt F schneiden die Innenwinkelsymmetralen die Dreieckseiten in den Punkten A´, B´ und C´. Dann gilt für den Flächeninhalt F´ des Dreiecks ΔA´B´C´ die nebenstehende Formel. Bestätige dies anhand des Dreiecks DABC[A(0|0), B(9044|0), C(20349|27132)]!

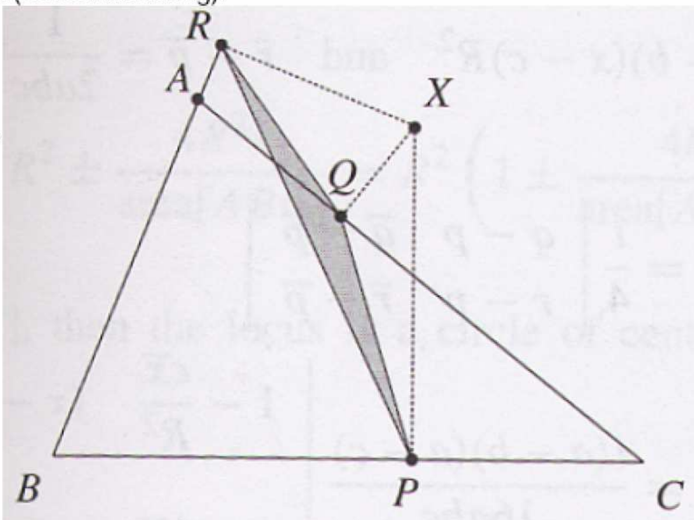
$$F' = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} \cdot F$$

103) Projiziert man einen Punkt X auf die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks ΔABC mit dem Umkreisradius r und dem Flächeninhalt F, so gilt für den Flächeninhalt F´ des aus den projizierten Punkten entstehenden Dreiecks ΔPQR die nebenstehende Formel, wobei U den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC bezeichnet (siehe Abbildung).

$$\boxed{F' = \frac{F}{4r^2} \cdot \left| \overline{UX}^2 - r^2 \right|}$$

Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(6|–17), B(5|–30), C(21|–22)], und zwar für den Punkt X(–4|23)!

Lsg.: F = 100
P(19|–23)
Q(–15|–10)
R(9|22)
F´ = 700
U(12|–24)
$r^2 = 85$
$\overline{UX}^2 = 2465$

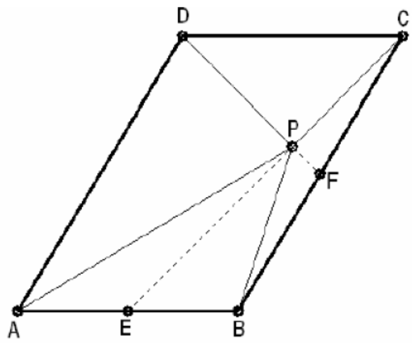



104)

In nebenstehend abgebildetem Parallelogramm ABCD sind E und F die entsprechenden Seitenhalbierungspunkte und P der Schnittpunkt von $g_{CE}$ mit $g_{DF}$. Unter diesen Voraussetzungen gilt stets der folgende elementargeometrische

SATZ. Die Flächeninhalte der Dreiecke ΔBCP, ΔCDP, ΔDAP und ΔABP verhalten sich wie 1 : 2 : 3 : 4.

Verifiziere diesen schönen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Parallelogramms ABCD[A(0|0), B(8|0), C(14|10), D]!

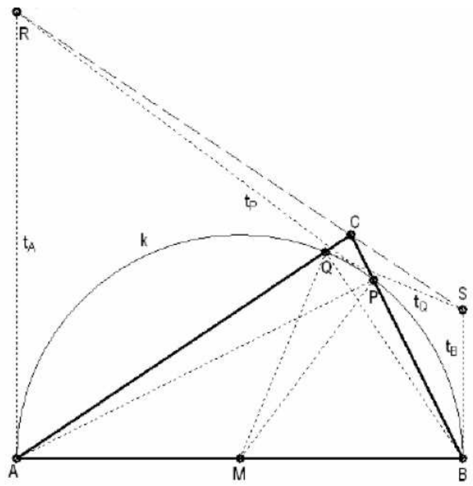



105)

) In nebenstehend abgebildetem Dreieck ΔABC sind P und Q die entsprechenden Höhenfußpunkte der Seiten BC und AC, welche aufgrund des Satzes von THALES auf dem Halbkreisbogen k über der Strecke AB liegen. Unter diesen Voraussetzungen gilt folgender

SATZ. Der Schnittpunkt R bzw. S der Kreistangenten $t_A$ und $t_P$ bzw. $t_B$ und $t_Q$ sowie der Eckpunkt C liegen kollinear.

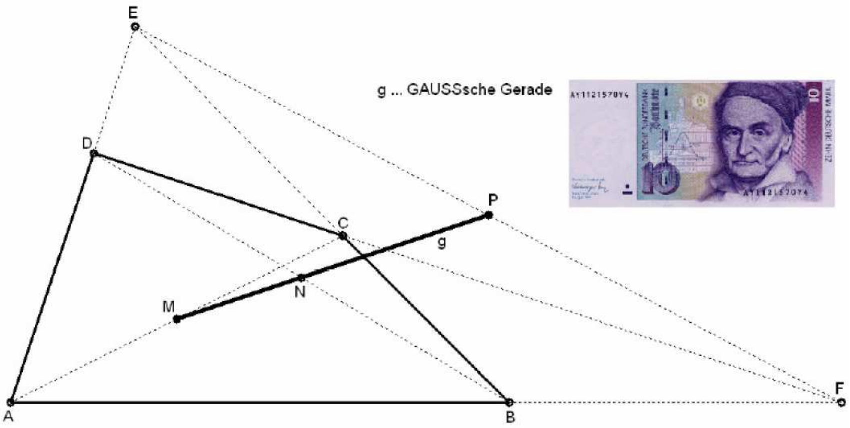
Verifiziere diesen schönen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(780|0), C(585|390)]!




106) Verifiziere am Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(–34|–8), B(56|28), C(14|64)] den folgenden SATZ. Ist I der Inkreismittelpunkt, U der Umkreismittelpunkt, r der Umkreisradius sowie $A_a$, $A_b$ und $A_c$ die Ankreismittelpunkte eines Dreiecks, dann gilt stets die Beziehung $\boxed{\overline{IU}^2 + \overline{A_aU}^2 + \overline{A_bU}^2 + \overline{A_cU}^2 = 12r^2}$.

[Lsg.: $A_a$(66|68), $A_b$(–64|58), $A_c$(264|–92), I(16|38), U(11|18), $12r^2$=25500]

107) Die GAUSSsche Gerade: Ergänzt man ein allgemeines Viereck ABCD wie in nebenstehender Abbildung illustriert zum vollständigen Vierseit ABCDEF, so liegen die Mittelpunkte M, N und P der drei(!) Diagonalen AC, BD und EF kollinear ("GAUSS-Gerade" g). Bestätige die Gültigkeit dieses erstaunlichen Theorems am konkreten Beispiel des Vierecks ABCD mit den Eckpunkten A(0|0), B(24|0), C(16|8) und D(4|12)!




108) Im Dreieck $\Delta$ABC bezeichne (wie üblich) U den Umkreismittelpunkt. Ferner sei $U_a$ bzw. $U_b$ bzw. $U_c$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta$UBC bzw. $\Delta$AUC bzw. $\Delta$ABU. Dann gilt der folgende bemerkenswerte SATZ. Die Geraden $g_{AU_a}$, $g_{BU_b}$ und $g_{CU_c}$ schneiden einander in einem Punkt K (Kosnita-Punkt).
Verifiziere dies für das Dreieck $\Delta$ABC[A(–128|–1796), B(2860|–800), C(2196|528)]!
[Lsg.: $U_a$(2130|–385), $U_b$(–2950|3350), $U_c$(2030|–3390), K(2160|–300)]

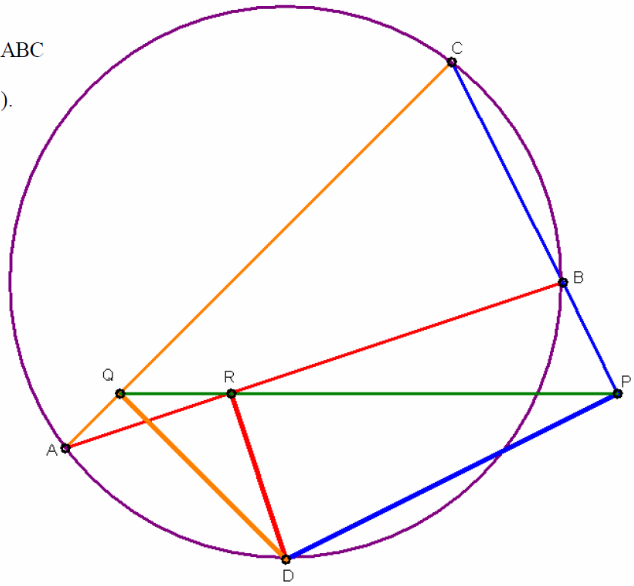
109)

(1) Projiziert man einen Punkt D des Umkreises eines Dreiecks $\Delta$ABC auf die (Verlängerungen der) Dreieckseiten, so liegen die drei projizierten Punkte P, Q und R kollinear ("WALLACE-Gerade").

(2) Ferner gilt (wobei r den Umkreisradius des Dreiecks $\Delta$ABC bezeichnet) die fortlaufende Proportion
$$\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{\overline{PQ}} = 2r\,.$$

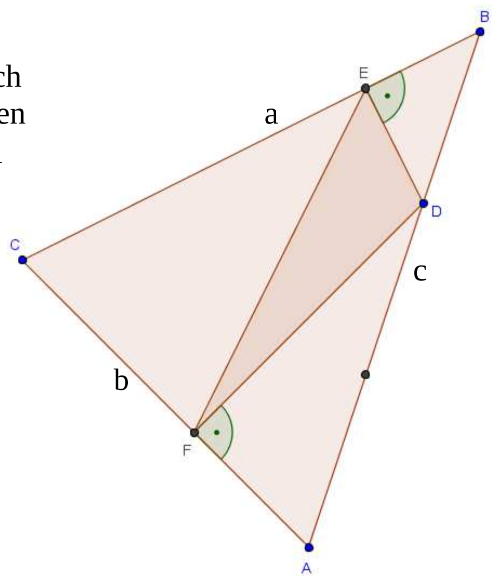
Verifiziere all dies am Dreieck $\Delta$ABC[A(–5|–2), B(4|1), C(2|5)] für den Punkt D($x_D$|–4)! Erkläre kurz und bündig, wie man die Kollinearität von P, Q und R ohne Rechnung sofort folgern kann!

[Lsg.: P(5|–1), Q(–4|–1), R(–2|–1), U(–1|1), 2r=10]



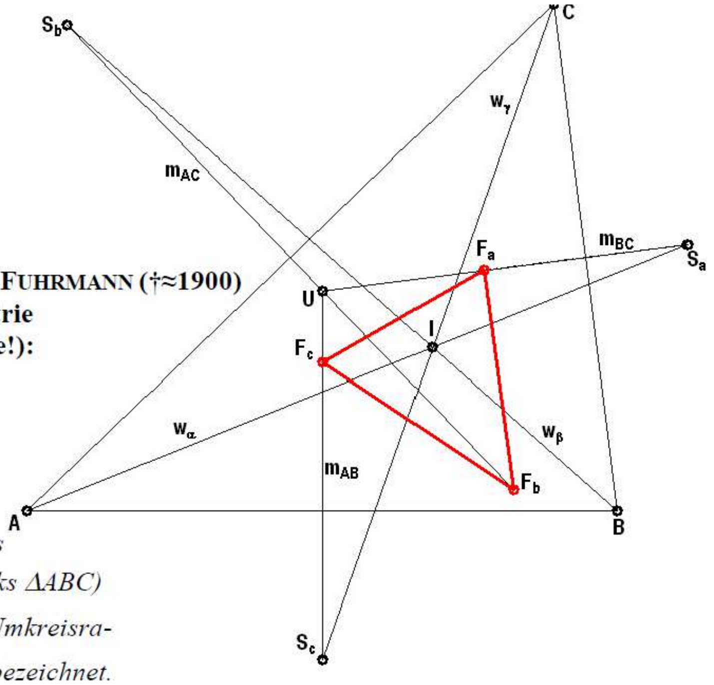

110) Legt man durch einen Punkt P des Umkreises eines Dreiecks $\Delta$ABC die Normalen auf die (Trägergeraden) der Dreieckseiten und schneidet diese jeweils mit letzteren, so liegen die drei entstehenden Schnittpunkte kollinear ("WALLACE–Gerade").
a) Verifiziere diesen Satz für das Dreieck $\Delta$ABC[A(1|1), B(8|2), C(4|10)] und den Punkt P(9|$y_P$)!
b) Wie a) mit jenem Punkt P', welcher der Spiegelpunkt von P am Umkreismittelpunkt ist.
c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunks S der WALLACE-Geraden aus (a) und (b) sowie das Maß des Schnittwinkels zwischen ihnen in S!

111) In der rechten Abbildung wurde die Seite AB in drei gleich lange Teile geteilt, woraus der Punkt D hervorgeht. Für den Flächeninhalt µ´ des Dreiecks $\Delta$DEF gilt dann die Formel $9a^2b^2\mu' = 8\mu^3$, wobei µ den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta$ABC bezeichnet. Verifiziere dies anhand des konkreten Dreiecks $\Delta$ABC[A(2/1), B(5/10), C(–3/6)]!



112) Verifiziere am Dreieck ABC[A(-12/0), B(15/9), C(-20/16)] für den Punkt P(8|0) folgenden
SATZ: Die Wallace Gerade eines Punktes P halbiert die Verbindungsstrecke von P und dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

113)




**Ein auf den deutschen Mathematiker W. FUHRMANN (†≈1900) zurückgehender Satz der Dreiecksgeometrie lautet wie folgt (vgl. nebenstehende Skizze!):**

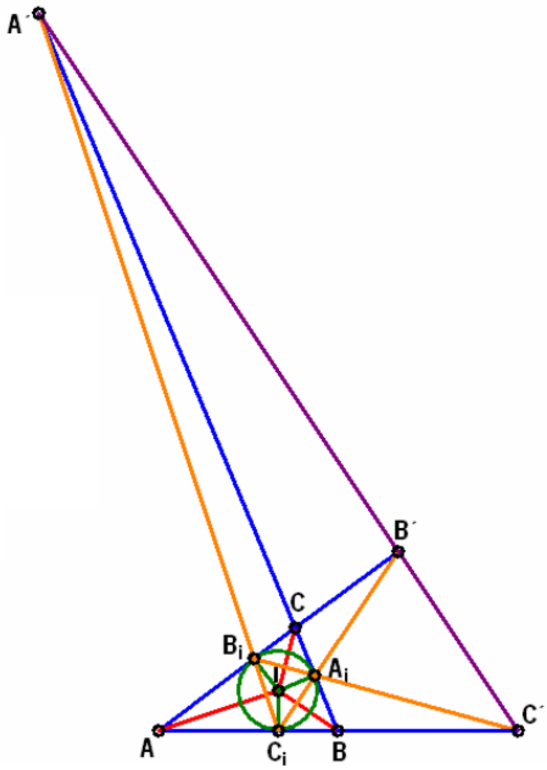
*Spiegelt man die Schnittpunkte $S_a$, $S_b$ und $S_c$ gegenüberliegender Strecken- und Winkelsymmetralen eines Dreiecks $\Delta ABC$ an den zugehörigen Dreieckseiten, so gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des entstandenen Dreiecks $\Delta F_aF_bF_c$ ("FUHRMANN-Dreieck" des Dreiecks $\Delta ABC$) die Formel* $\boxed{\mathcal{A} = \frac{\overline{UI}^2 \cdot u}{4r}}$*, worin r bzw. u den Umkreisradius bzw. den Umfang des Dreiecks $\Delta ABC$ bezeichnet.*

► Kontrolliere die Gültigkeit dieses Juwels der Elementargeometrie am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)] (Achtung! Skizze nicht maßstabsgetreu!!).

► Welche besondere Lage weist das konkrete FUHRMANN-Dreieck auf und inwiefern erleichtert dies die Berechnung von $\mathcal{A}$ (verbale Beschreibung sowie Illustration anhand einer Handskizze)?

114) Fortsetzung von Aufgabe 113):
Überprüfe am Beispiel des Dreiecks aus Aufgabe 113) die Gültigkeit des folgenden

Satz(es): Der Inkreismittelpunkt **eines Dreiecks** ist auch der Höhenschnittpunkt **seines** FUHRMANN-Dreiecks.

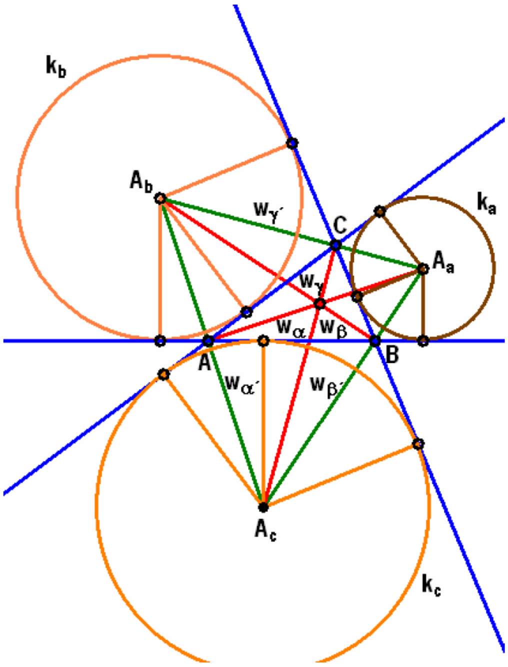



115) Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten A(–23|–14), B(22|–4) und C(1|14).

a) Berechne die Koordinaten der in der rechten Abbildung illustrierten Punkte $A_i$, $B_i$ und $C_i$ (Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreieckseiten).

b) Die NOBBS-Punkte A´, B´ und C´ eines Dreiecks sind als die Schnittpunkte $\{A'\} = g_{BC} \cap g_{B_iC_i}$, $\{B'\} = g_{AC} \cap g_{A_iC_i}$ und $\{C'\} = g_{AB} \cap g_{A_iB_i}$ definiert. Zeige am vorliegenden konkreten Beispiel die Gültigkeit von folgendem

**SATZ:** Die NOBBS-Punkte eines Dreiecks befinden sich in kollinearer Lage.



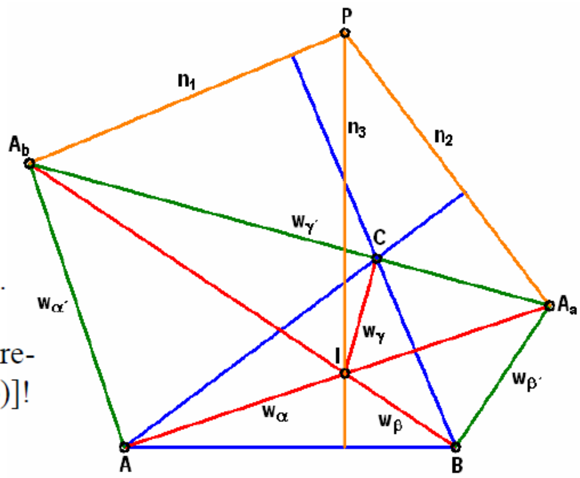

Abgesehen vom Inkreis eines Dreiecks gibt es noch drei weitere Kreise, welche die (Verlängerungen der) Dreieckseiten berühren. Man nennt sie die Ankreise eines Dreiecks (siehe Abbildung links!).

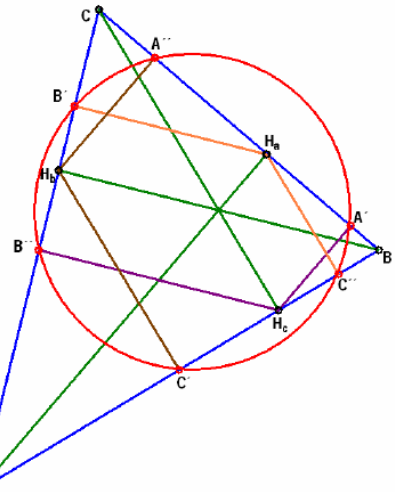
Über In- und Ankreise gibt es eine wahre Fülle interessanter Sätze {Gib z.B. im Internet einmal die Namen GERGONNE und NAGEL ein und verwende für GERGONNE – ein innerer und drei äußere GERGONNESCHE Punkte! – das Dreieck aus Aufgabe 6), für NAGEL – ein innerer und drei äußere NAGEL sche Punkte! – das Dreieck $\Delta ABC[A(-29|-44), B(16|-34), C(-5|-16)]$!}, ein bemerkenswertes Theorem neueren Datums (2006) stammt vom österreichischen Geometer Boris ODEHNAL und ist Inhalt der nächsten Aufgabe (vgl. zugehörige Abbildung!):

116) Es seien $A_a$ und $A_b$ zwei (von insgesamt drei) Ankreismittelpunkte(n) eines Dreiecks $\Delta ABC$ mit dem Inkreismittelpunkt I. Sind die Normalen $n_1$, $n_2$ und $n_3$ wie in der Abbildung definiert, so gilt der folgende bemerkenswerte

**SATZ.** $n_1$, $n_2$ und $n_3$ schneiden einander in einem Punkt P.

Verifiziere dieses Juwel der Elementargeometrie am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(63|0), C(48|36)]$!



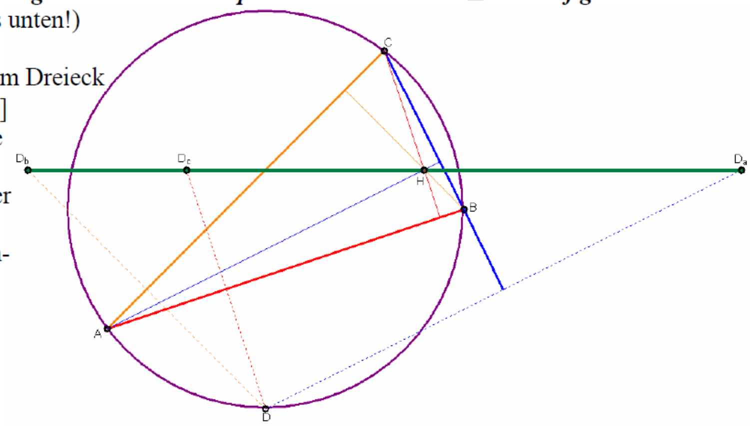

117) Legt man durch jeden Höhenfußpunkt eines Dreiecks Normale auf die verbleibenden Dreieckseiten und ermittelt die Schnittpunkte mit letzteren, so entsteht ein Sechseck A´A´´B´B´´C´C´´ (siehe Abbildung). Für dieses Sechseck gilt dann der folgende bemerkenswerte

**SATZ.** Die Normalprojektionen A´, A´´, B´, B´´, C´, C´´ der Höhenfußpunkte eines Dreiecks $\Delta ABC$ (mit den Innenwinkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sowie dem Umkreisradius R) auf die Dreieckseiten liegen auf einem Kreis (TAYLOR-Kreis), für dessen Radius r die Formel $\boxed{r = R \cdot \sqrt{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma}}$ gilt.

Bestätige diesen Lehrsatz am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-102|-118), B(98|2), C(-42|122)]$!

118) ***"Spiegelt man einen Punkt D des Umkreises eines Dreiecks $\Delta ABC$ an den (Verlängerungen der) Dreieckseiten, so liegen die drei gespiegelten Punkte $D_a$, $D_b$, und $D_c$ auf einer Gerade g. Ferner liegt der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\Delta ABC$ auf g."***
(vgl. auch Abbildung rechts unten!)

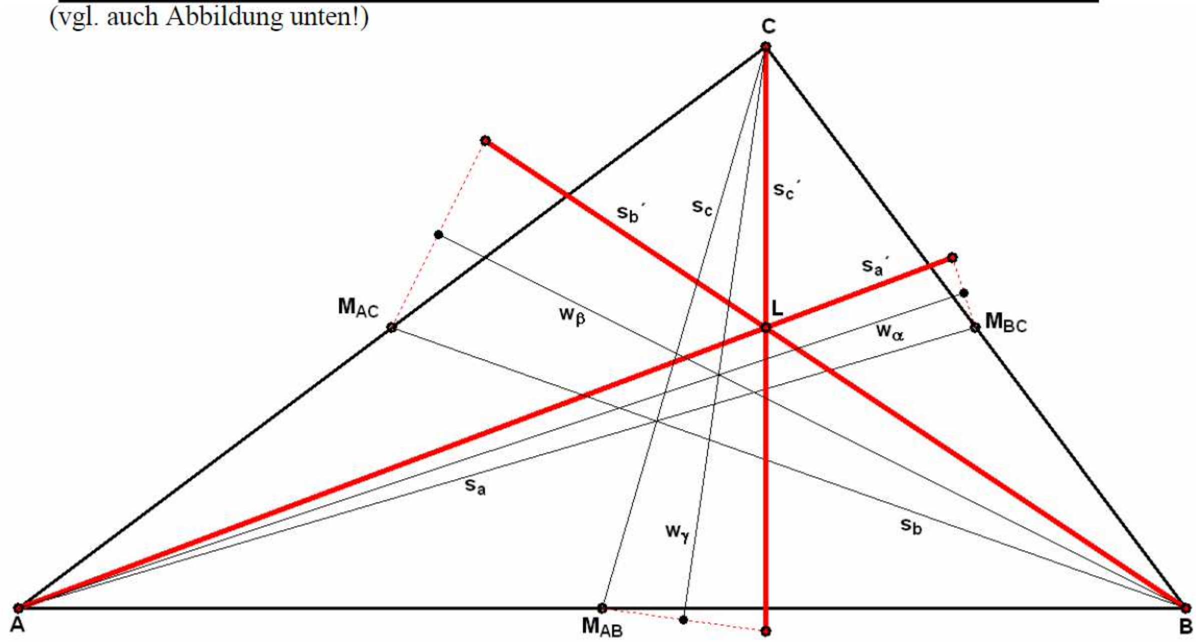
Verifiziere diese beiden Sätze am Dreieck $\Delta ABC[A(-5|-2), B(4|1), C(2|5)]$ für den Punkt $D(x_D|-4)$! Erkläre kurz und bündig, wie man nach Berechnung der Koordinaten der Punkte $D_a$, $D_b$, $D_c$ und H deren Kollinearität ohne weitere Rechnung unmittelbar folgern kann!




119)

Spiegelt man die Schwerlinien eines Dreiecks an den entsprechenden Winkelsymmetralen, so schneiden einander die drei resultierenden Geraden (*Symmediane* genannt) in einem Punkt $L$, dem sogenannten LEMOINE-Punkt (Emile Michele Hyacinthe, französischer Mathematiker, 1840 – 1912).

(vgl. auch Abbildung unten!)

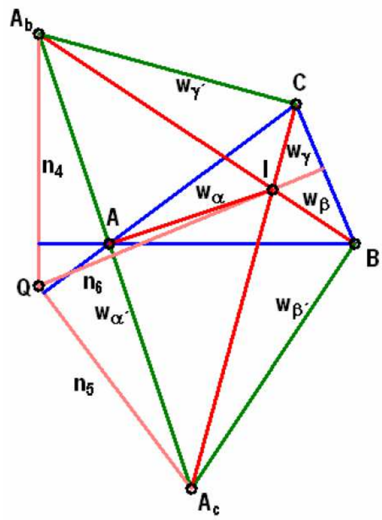



Kontrolliere die Gültigkeit des obig formulierten Lehrsatzes am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(100|0), C(64|48)]$!

120) bis 122): Fortsetzungen zur Aufgabe 116)

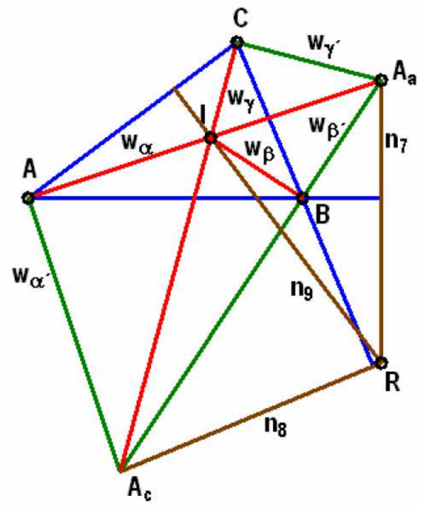
120) Zweite Odehnal-Variante:

$n_4 \perp g_{AB}$, $A_b \in n_4$
$n_5 \perp g_{AC}$, $A_c \in n_5$
$n_6 \perp g_{BC}$, $I \in n_6$
Gemeinsamer Schnittpunkt Q
[Lsg. bei gleichem Dreieck wie in erster Odehnal-Aufgabe: $A_c(21|-63)$, $Q(-18|-11)$]

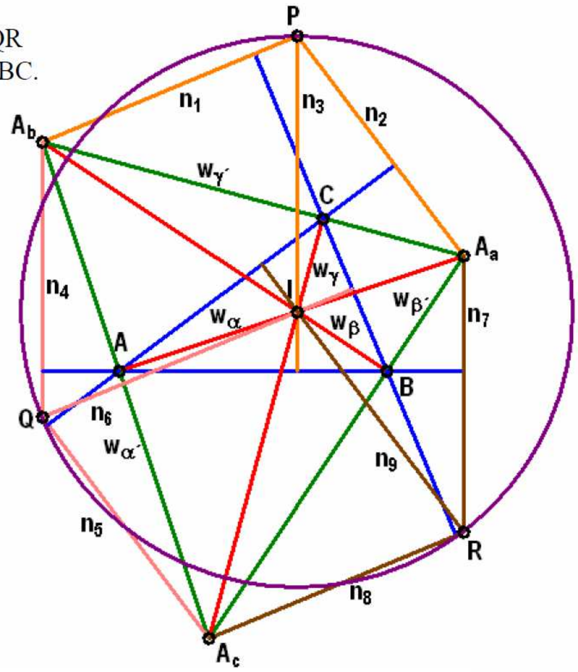


121) Dritte Odehnal-Variante:

$n_7 \perp g_{AB}$, $A_a \in n_7$
$n_8 \perp g_{BC}$, $A_c \in n_8$
$n_9 \perp g_{AC}$, $I \in n_9$
Gemeinsamer Schnittpunkt R
[Lsg. bei gleichem Dreieck wie
in erster Odehnal-Aufgabe: R(81|–38)]



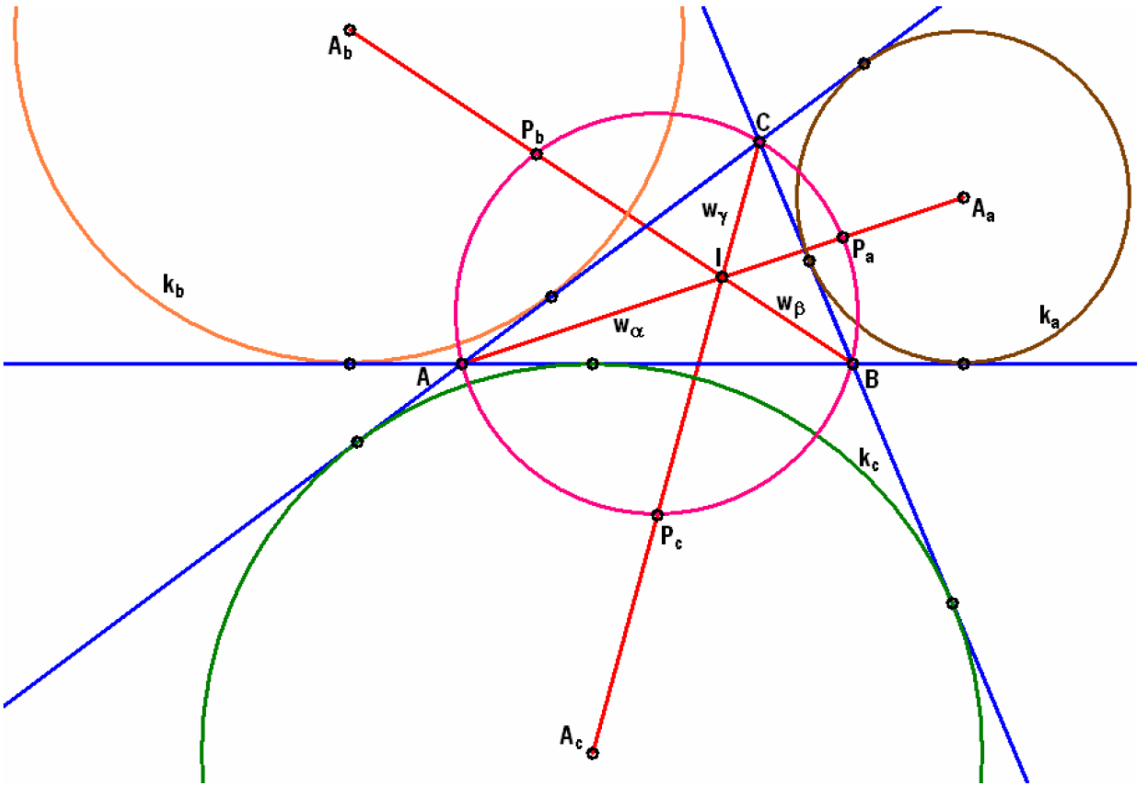

122) Umfassender Satz: Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔPQR ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC.



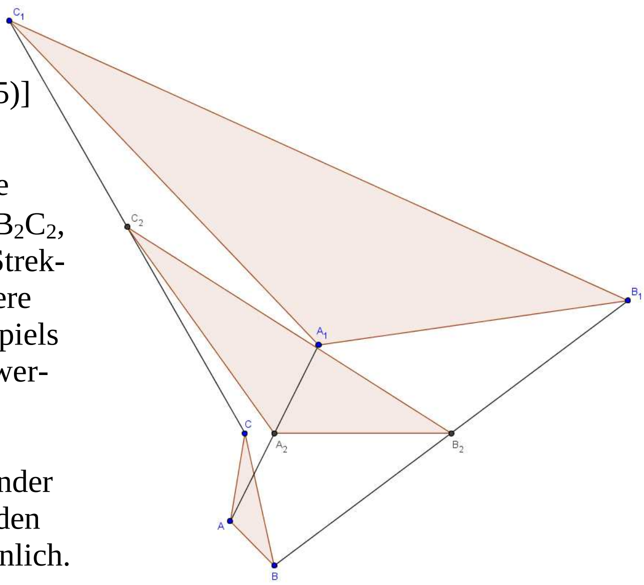

123) Verifiziere anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)] die folgende Satzgruppe (vgl. untere Abbildung!):

Satz 1. a) A, I und $A_a$ liegen kollinear.
b) B, I und $A_b$ liegen kollinear.
c) C, I und $A_c$ liegen kollinear.

Satz 2. Die Mittelpunkte $P_a$, $P_b$ und $P_c$ der Strecken $IA_a$, $IA_b$ und $IA_c$ liegen auf dem Umkreis des Dreiecks ΔABC.



124) a) Zeige auf zwei Arten, dass die Dreiecke $\Delta ABC[A(2/1), B(5/-2), C(3/7)]$ und $\Delta A_1B_1C_1[A_1(8/13), B_1(29/16), C_1(-13/35)]$ zueinander ähnlich sind!




b) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte $A_2$, $B_2$ und $C_2$ des "Mittendreiecks" $\Delta A_2B_2C_2$, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Strecken $AA_1$, $BB_1$ und $CC_1$ sind und verifiziere anhand des vorliegenden konkreten Beispiels die Gültigkeit des folgenden bemerkenswerten Satzes aus der Elementargeometrie:

Satz. Das Mittendreieck zweier zueinander ähnlicher Dreiecke ist zu den beiden Ausgangsdreiecken wiederum ähnlich.

c) Bestätige ferner anhand der vorliegenden Dreiecke, dass für den Ähnlichkeitsfaktor $\boxed{k_1 = \overline{A_1B_1} : \overline{AB} \left(= \overline{A_1C_1} : \overline{AC} = \overline{B_1C_1} : \overline{BC}\right)}$, den Drehwinkel $\varphi = \sphericalangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)\left[= \sphericalangle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1C_1}\right) = \sphericalangle\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B_1C_1}\right)\right]$ sowie den Ähnlichkeitsfaktor $\boxed{k_2 = \overline{A_2B_2} : \overline{AB} \left(= \overline{A_2C_2} : \overline{AC} = \overline{B_2C_2} : \overline{BC}\right)}$ die Gleichung $k_2 = \sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cdot \cos\varphi}$ gilt.

125) Beweise folgenden

SATZ. Die Winkelsymmetralen von je zwei gegenüberliegenden Seitengeraden eines Sehnenvierecks stehen aufeinander normal.

…. nicht wirklich! ☺ Stattdessen: $\boxed{\text{Kontrolle am Sehnenviereck von Aufgabe 52) erbeten!}}$

126) Dem Halbkreis über einer Strecke AB sei ein konvexes Viereck ABCD einbeschrieben. Der Schnittpunkt von AC und BD sei S, der Fußpunkt des Lotes von S auf AB sei T.
Man beweise, dass ST den Winkel CTD halbiert.

Keine Rede von einem Beweis, sondern nur von folgender Verifikation:

- Kontrolliere zunächst, dass die Punkte C(54|153) und D(–135|90) auf dem Halbkreis **über** dem Durchmesser AB[A(–162|–9), B(162|9)] liegen (beide Möglichkeiten für diesen Nachweis ausführen!).
- Verifiziere den $\boxed{\text{obig formulierten Satz}}$ nun am konkreten Beispiel!

127) In jedem Dreieck mit dem Inkreisradius $\rho$, dem Umkreisradius r sowie der Summe s der Normalabstände des Umkreismittelpunkts von den Dreieckseiten gilt die Formel $\rho + r = s$. Verifiziere dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(-10|8), B(14|0), C(20|18)]$!

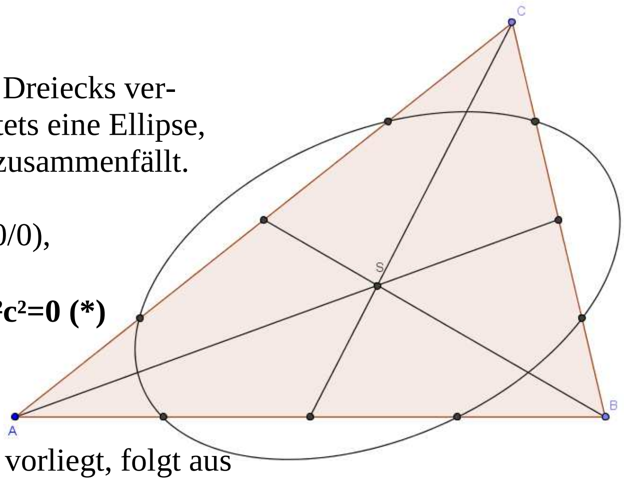
128) Für alle Dreiecke, deren Seitenlängen eine arithmetische Folge bilden, gilt folgender Lehrsatz aus der Elementargeometrie: *Die Verbindungsstrecke vom Inkreismittelpunkt zum Schwerpunkt des Dreiecks verläuft parallel zu einer Dreieckseite.*

a) Zeige zunächst, dass das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(28|0), C(40|9)]$ die Voraussetzungen des Lehrsatzes erfüllt!

b) Verifiziere den Lehrsatz am konkreten Beispiel und äußere anhand deiner Verifikation eine allgemeine Vermutung darüber, zu welcher Dreieckseite die Gerade $g_{IS}$ stets parallel verläuft!

129) In jedem Dreieck $\Delta ABC$ gilt folgender elementargeometrische Lehrsatz: ***Ist I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta ABC$, so hat das aus den Streckensymmetralen $m_{AI}$, $m_{BI}$ und $m_{CI}$ gebildete Dreieck den gleichen Umkreis wie das Dreieck $\Delta ABC$.*** Verifiziere diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(66|0), C(96|72)]$.

**Anregung für Spezialgebiet/Fachbereichsarbeit:**




Durch die sechs von den Seitenhalbierungspunkten eines Dreiecks verschiedenen "Viertelungspunkte" der Dreieckseiten geht stets eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt S des Dreiecks zusammenfällt.

Analytische Details: Ausgehend von den Eckpunkten A(0/0), B(4a/0) und C(4b/4c) des Dreiecks $\Delta ABC$ erhält man via
**ell: $c^2x^2+c(a-2b)xy+(a^2-ab+b^2)y^2-4ac^2x+4ac(b-a)y+3a^2c^2=0$ (*)**
eine Gleichung dieser Ellipse ell, wobei zu deren Gewinnung die Methode "Plückers $\mu$" sehr geeignet ist.

Dass überhaupt eine Ellipse (freilich in allgemeiner Lage vorliegt, folgt aus $\mathcal{D} = -3a^2c^2 < 0 \ \forall (a,c) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei $\mathcal{D}$ die Diskriminante von (*) bezeichnet.

**Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!**

*Wien, im Dezember 2012.* *Dr. Robert Resel, e. h.*