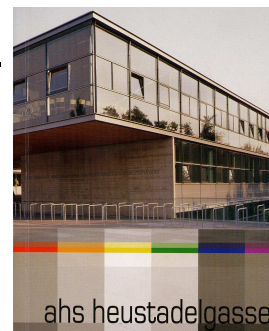


Übungsbeispiele für die drei- stündige Schularbeit sowie für die schriftliche Matura [8B (gymnasialer Teil), 2013/14]

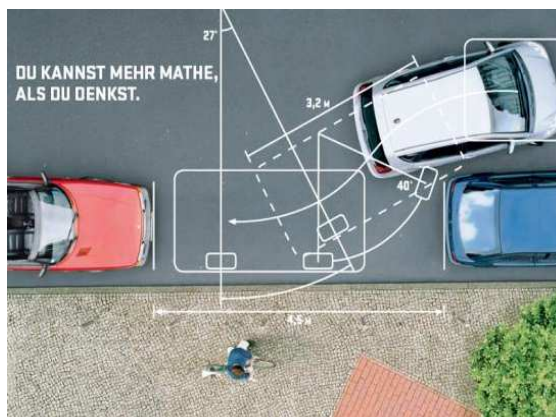


Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der

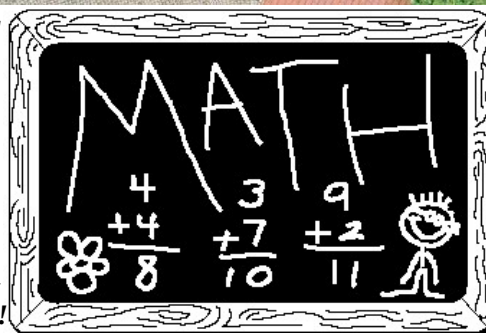
Analytischen Raumgeometrie ein

Kapitel der 6. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren

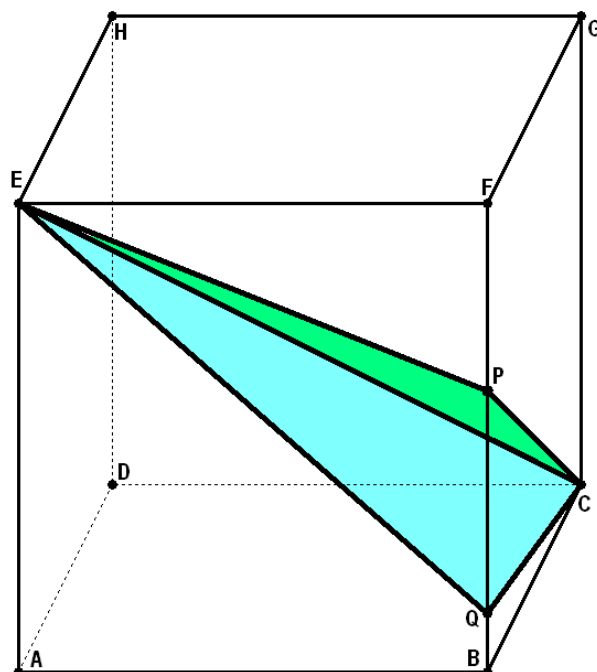
"Bausteine" geradezu charakteristisch für Maturabeispiele sind.



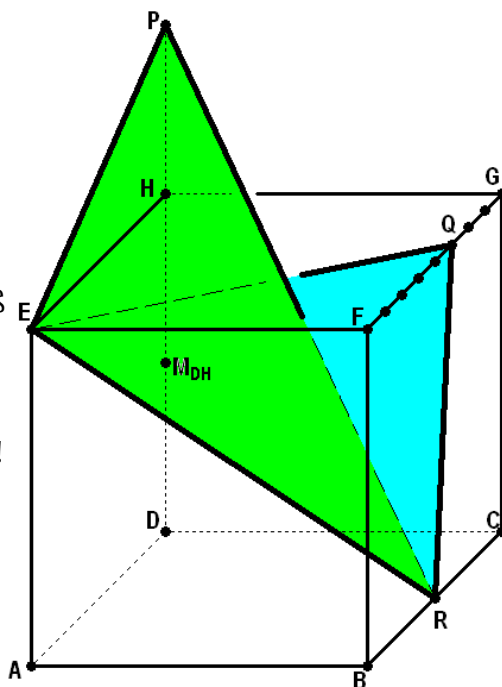
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



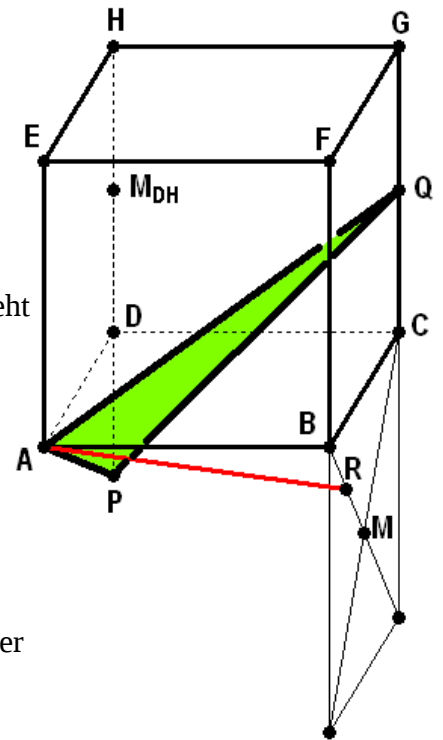
- 1) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Kantenlänge 40 abgebildet. Die Entfernung von F und P beträgt 16, jene von P und Q exakt 19. Berechne das Maß des Winkels φ zwischen den abgebildeten Dreiecken(!) $\triangle E C Q$ und $\triangle E C P$!



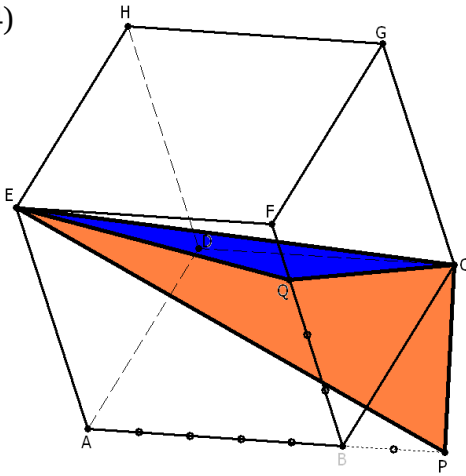
- 2) In der unteren Figur sind ein Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 8 sowie drei aus ihm abgeleitete Punkte P, Q und R abgebildet. Dabei ist R der Mittelpunkt der Würfelkante BC und P der Spiegelpunkt von M_{DH} an H. Durch Achtelung der Würfelkante FG entsteht schließlich Q. Berechne das Maß des Winkels zwischen den Dreiecken(!) $\triangle E R P$ und $\triangle E R Q$!



- 3) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Kantenlänge 4 abgebildet. Q ist der Mittelpunkt der Würfelkante CG, P der Spiegelpunkt von M_{DH} an D. M ist der Mittelpunkt jenes Quadrats, welches durch Spiegelung des Quadrats BCGF an der Würfelkante BC entsteht, R der Mittelpunkt der Strecke BM. Berechne das Maß des Winkels φ zwischen dem Dreieck(!) ΔAPQ und der Strecke(!) AR!

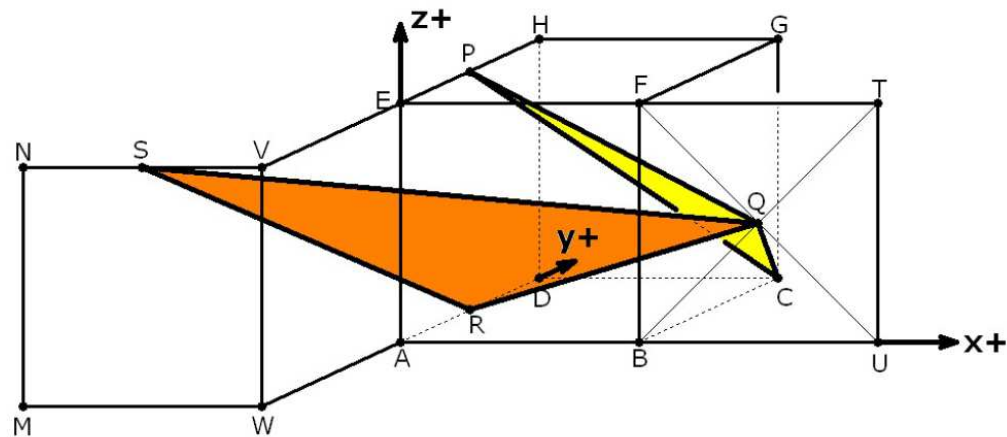


4)



Der links abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 20. Q entsteht durch Viertelung der Kante BF, P geht aus fortlaufender Fünftelung von AB über B hinaus hervor. Ermittle ohne Taschenrechner das Maß des spitzen Schnittwinkels φ der Ebenen ε_{CEP} und ε_{CEQ} ! Zeige ferner für die Flächeninhalte F_1 und F_2 der Dreiecke ΔCEQ und ΔCEP die Gültigkeit der Proportion $F_2 : F_1 = 8/5 \cdot \cos \varphi$!

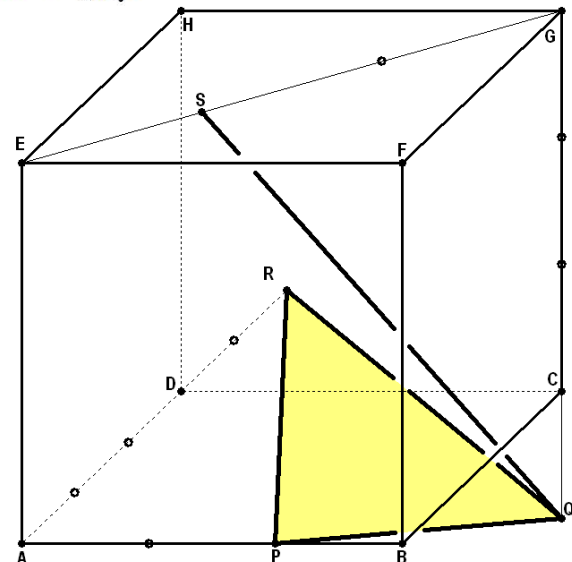
5)



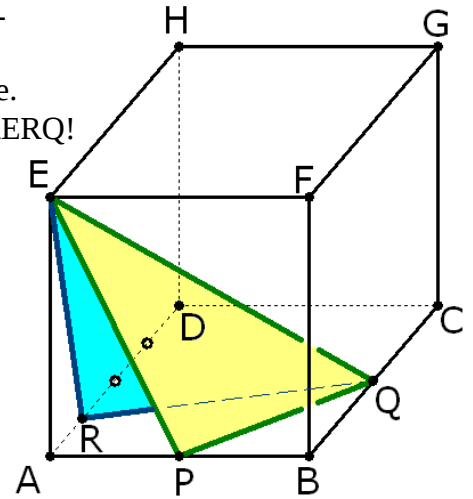
In obiger Figur ist ein Würfel $ABCDEFGH$ (Kantenlänge 2) mit drei angehängten Quadraten $BUTF$, $WAEV$ und $MWVN$ abgebildet.

Q ist der Mittelpunkt des Quadrats $BUTF$, P, R und S sind Kantenmittelpunkte. Berechne das Maß des Schnittwinkels zwischen den Ebenen ε_{PCQ} und ε_{SRQ} !

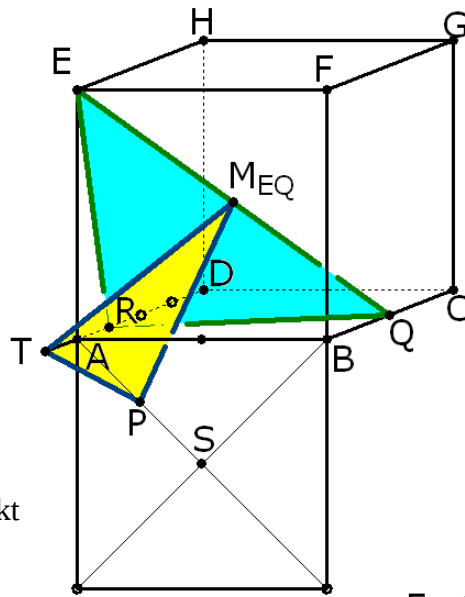
- 6) Im nebenstehend abgebildeten Würfel $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 3 gehen die Punkte P, Q, R und S aus (im Fall von Q und R: fortlaufende) Drittelungen von Würfelkanten sowie einer Flächendiagonale hervor. Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ , welchen die Gerade g_{QS} und die Ebene ε_{PQR} einschließen.



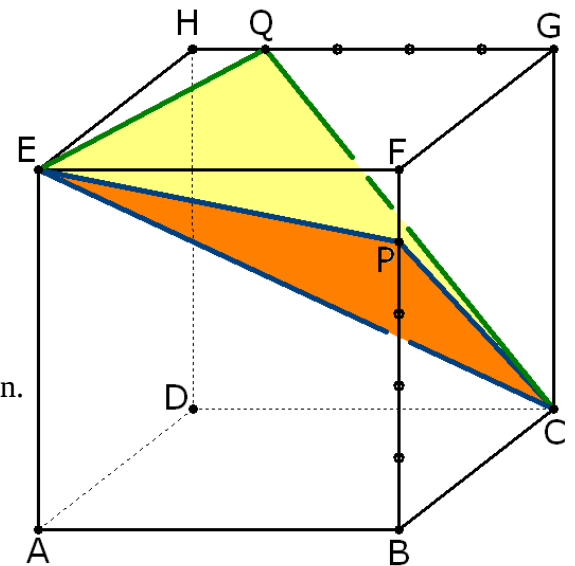
- 7) Nebenstehend ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 abgebildet, dessen Kante AD in vier gleich lange Teile geteilt wurde, woraus sich der Punkt R ergibt. P und Q sind entsprechende Kantenmittelpunkte. Berechne das Maß des Schnittwinkels der Dreiecke(!) $\triangle EPQ$ und $\triangle ERQ$!



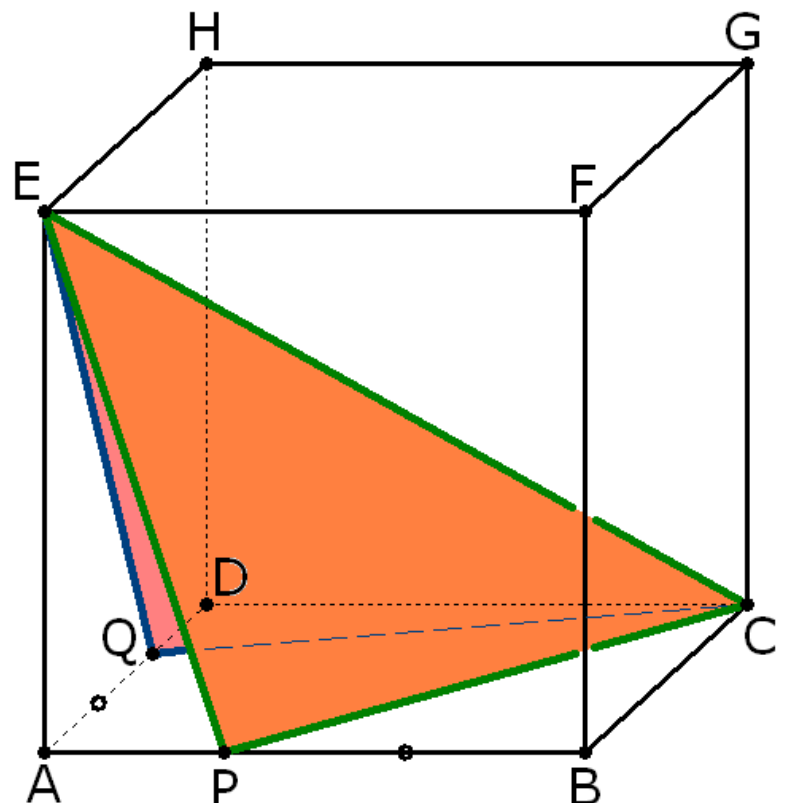
- 8) Nebenstehend ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 abgebildet, dessen Kante AD in vier gleich lange Teile wurde, woraus sich der Punkt R ergibt. Q ist ein Kantenmittelpunkt, S der Diagonalenmittelpunkt der Kantenlänge 4 abgebildet, dessen Kante AD in vier gleich lange Teile geteilt wurde, woraus sich der Punkt R ergibt. Q ist ein Kantenmittelpunkt, S der Diagonalenschnittpunkt eines angehängten Quadrats, P der Mittelpunkt der Strecke AS sowie T der Spiegelpunkt von R an A. Berechne das Maß des Schnittwinkels zwischen den Dreiecken (!) $\triangle ERQ$ und $\triangle TPM_{EQ}$!



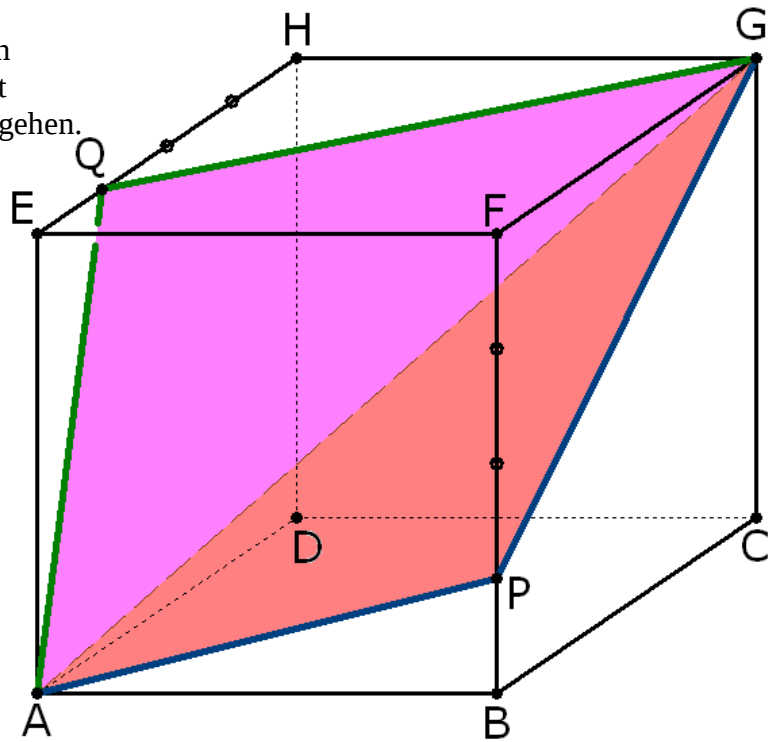
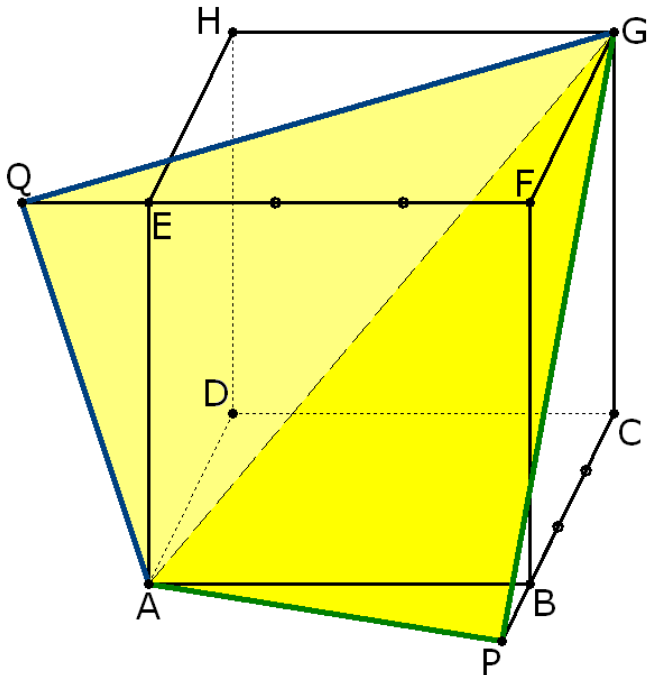
- 9) Nebenstehend ist ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 5 abgebildet, dessen Kanten BF und GH in fünf gleich lange Teile geteilt wurden, woraus die Punkte P und Q hervorgehen. Ermittle das Maß des Schnittwinkels der beiden Dreiecke(!) $\triangle ECP$ und $\triangle ECQ$!



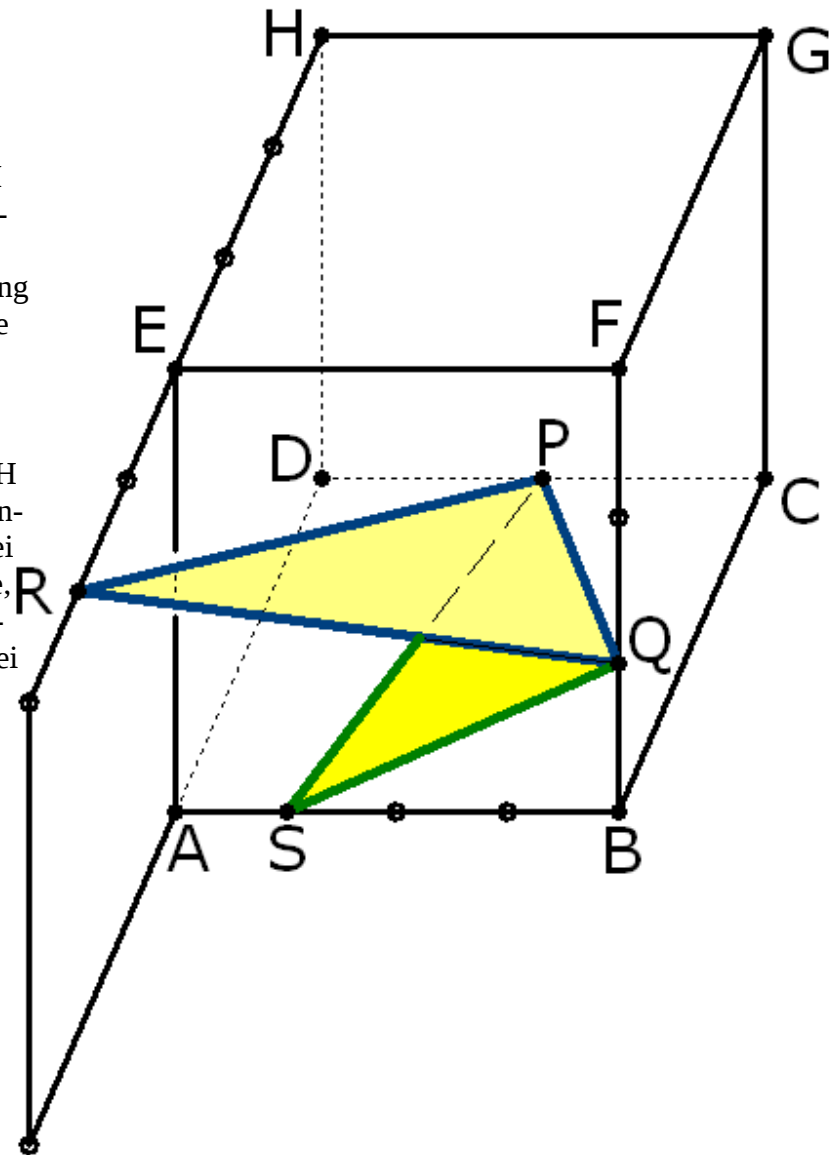
- 10) Nebenstehend ist ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 3 abgebildet, dessen Kanten AB und AD in drei gleich lange Teile geteilt wurden, woraus die Punkte P und Q hervorgehen. Ermittle das Maß des Schnittwinkels der Dreiecke(!) $\triangle EPC$ und $\triangle EQC$!



- 11) Nebenstehend ist ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 4 abgebildet, dessen Kanten BF und EH in vier gleich lange Teile geteilt wurden, woraus die Punkte P und Q hervorgehen. Ermittle das Maß des Schnittwinkels der Dreiecke(!) $\triangle APG$ und $\triangle AGQ$!

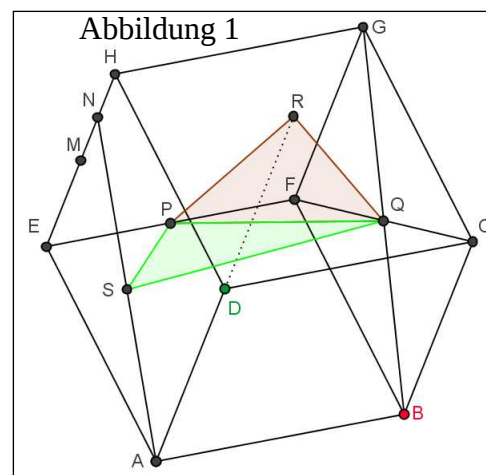


- 12) Obenstehend ist ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 3 abgebildet, dessen Kanten BC und EF in drei gleich lange Teile geteilt wurden, woraus in der Verlängerung die Punkte P und Q hervorgehen. Ermittle das Maß des Schnittwinkels der beiden Dreiecke(!) $\triangle APG$ und $\triangle AGQ$!

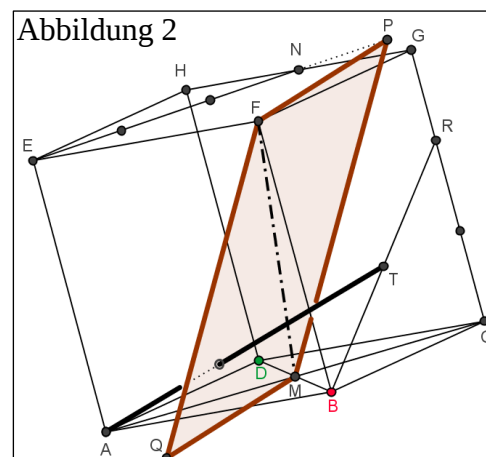


- 13) Nebenstehend ist ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 12 abgebildet, dessen Kante CD bzw. BF bzw. AB in zwei bzw. drei bzw. vier gleich lange Teile geteilt wurde, woraus die Punkte P und Q und S hervorgehen. Ebenso wurde die Kante EH in drei Teile geteilt, woraus in der Verlängerung der Punkt R entstanden ist. Ermittle das Maß des Schnittwinkels der beiden Dreiecke(!) $\triangle RQP$ und $\triangle SQP$!

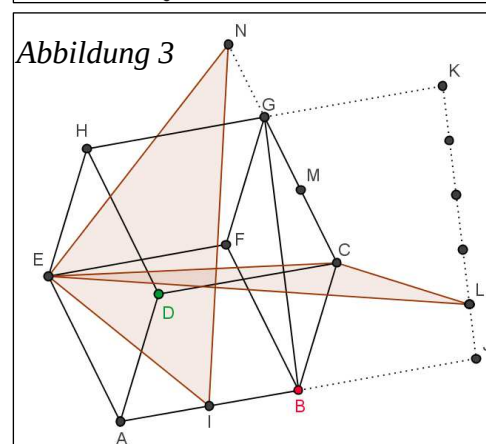
- 14) Abbildung 1: Würfel der Kantenlänge 8
P und M sind Kantenmittelpunkte, Q ein Flächenmittelpunkt.
R ist der Spiegelpunkt der Würfecke A am Würfeckpunkt D.
N ist der Mittelpunkt der Strecke MH, S jener der Strecke AN.
Zeige, dass die Dreiecke ΔPQR und ΔPQS
einen Winkel von 150° einschließen!



- 15) Abbildung 2: Würfel der Kantenlänge 6
N ist ein Kantenmittelpunkt, M ein Flächenmittelpunkt.
R entsteht durch Kantendrittung, P durch fortlaufende
Drittung der Strecke EN. T ist der Mittelpunkt der Strecke BR.
Zeige, dass die Gerade g_{AT} mit der Ebene ε_{MPF} (welche der
plastischeren Darstellung wegen bzgl. der Lagebeziehung zu
 g_{AT} über das Dreieck ΔMPF hinaus durch das Parallelogramm
MPFQ repräsentiert wurde) einen Winkel von 45° einschließt!

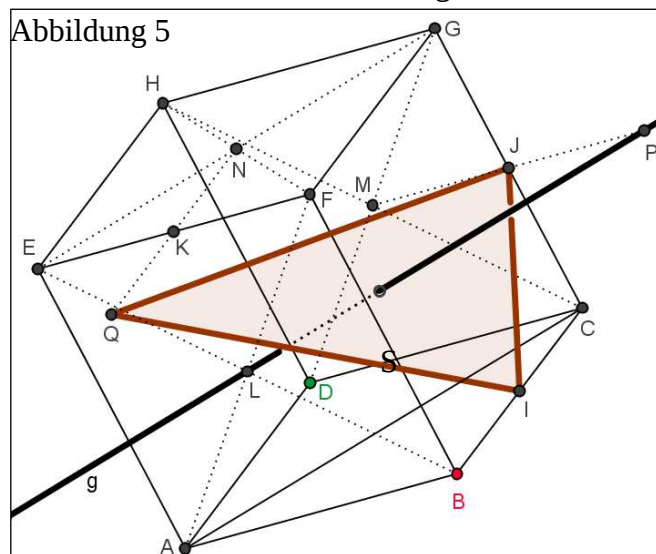
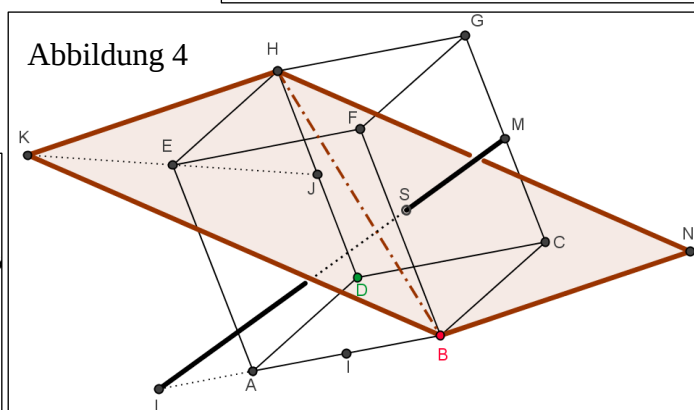


- 16) Abbildung 3: Würfel der Kantenlänge 10
I und M sind Kantenmittelpunkte, J ist der Spiegelpunkt der
Würfecke A am Würfeckpunkt B. N ist der Spiegelpunkt
von M an G. K ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms
GBJK, L geht aus einer Fünftelung der Strecke JK hervor.
Zeige, dass die Ebenen ε_{EIN} und ε_{ELC} aufeinander normal stehen
und dass die Dreiecke ΔEIN und ΔELC beide rechtwinklig sind.



- 17) Abbildung 4: Würfel der Kantenlänge 14
I, J und M sind Kantenmittelpunkte, L bzw. K ent-
steht durch Spiegelung von J an E bzw. von I an A.

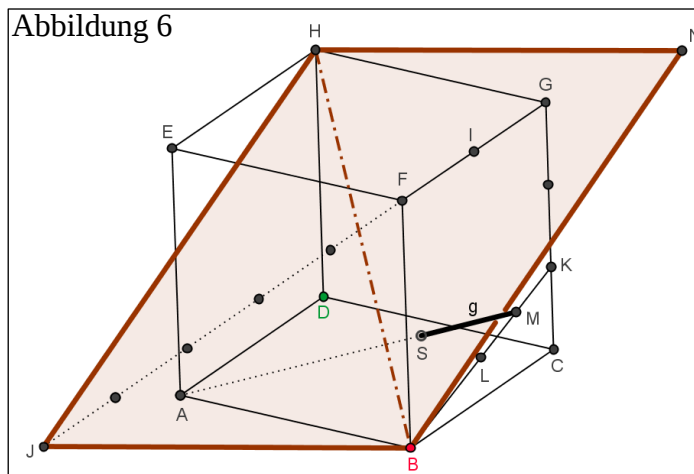
- a) Zeige, dass die Gerade g_{LM} mit der Ebene ε_{HKB} (welche der
plastischeren Darstellung wegen bzgl. der Lagebeziehung zu
 g_{LM} über das Dreieck ΔHKB hinaus durch das Parallelogramm
HKBN repräsentiert wurde) einen Winkel von 60° einschließt!
b) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt
 $\{S\} = g_{LM} \cap \varepsilon_{HKB}$ die Länge der Strecke LM?
c) Zeige, dass S auf der Diagonale KN des
Parallelogramms HKBN liegt. In wel-
chem Verhältnis teilt S die Diagonale?



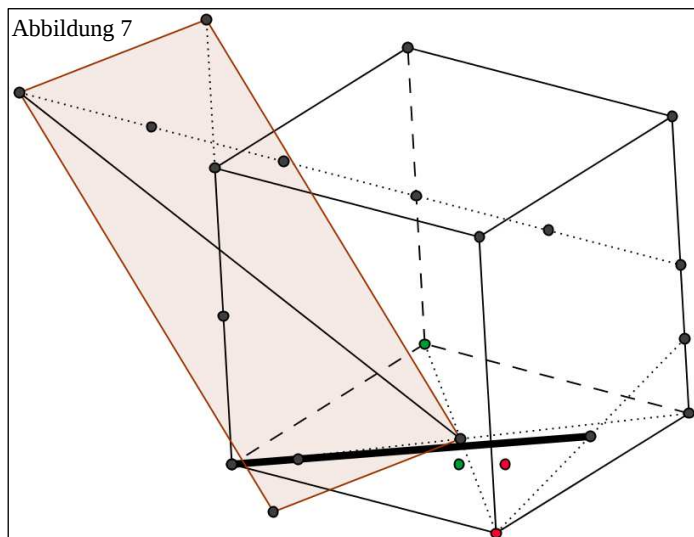
- 18) Abbildung 5: Würfel der Kantenlänge 6
I, J und K sind Kantenmittelpunkte, L, M und
N sind Flächenmittelpunkte. P bzw. Q entsteht
durch Spiegelung von M an J bzw. von N an
K. Zeige, dass g die Ebene ε_{IJQ} im Schwer-
punkt des Dreiecks ΔIJQ unter 30° schneidet.

- 19) Abbildung 6: Würfel der Kantenlänge 156
I ist ein Kantenmittelpunkt, K entsteht durch Kantendrittung. L ist der Mittelpunkt der Strecke BK, M jener der Strecke LK. J geht durch fortlaufende Spiegelung von I an F hervor.

- a) Zeige, dass g mit der Ebene ϵ_{HJB} (welche der plastischeren Darstellung wegen bzgl. der Lagebeziehung zu g über das Dreieck ΔHJB hinaus durch das Parallelogramm $HJBN$ repräsentiert wurde) einen Winkel von 60° einschließt!
b) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt $\{S\}=g \cap \epsilon_{HJB}$ die Länge der Strecke AM ?

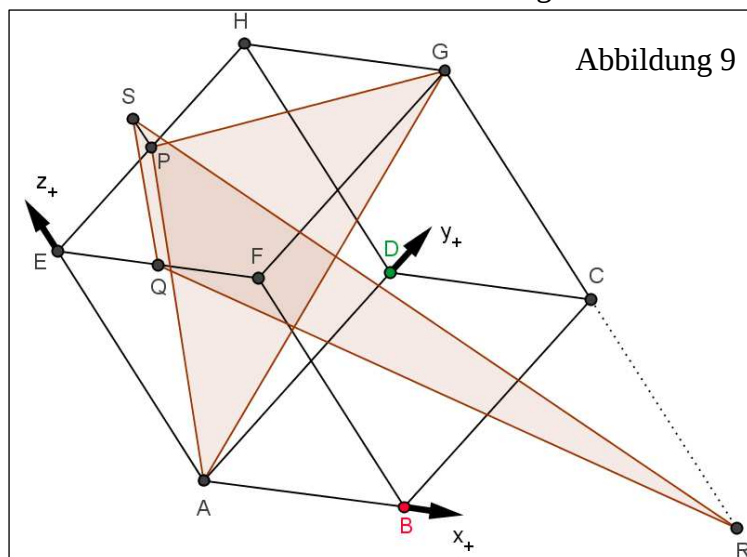
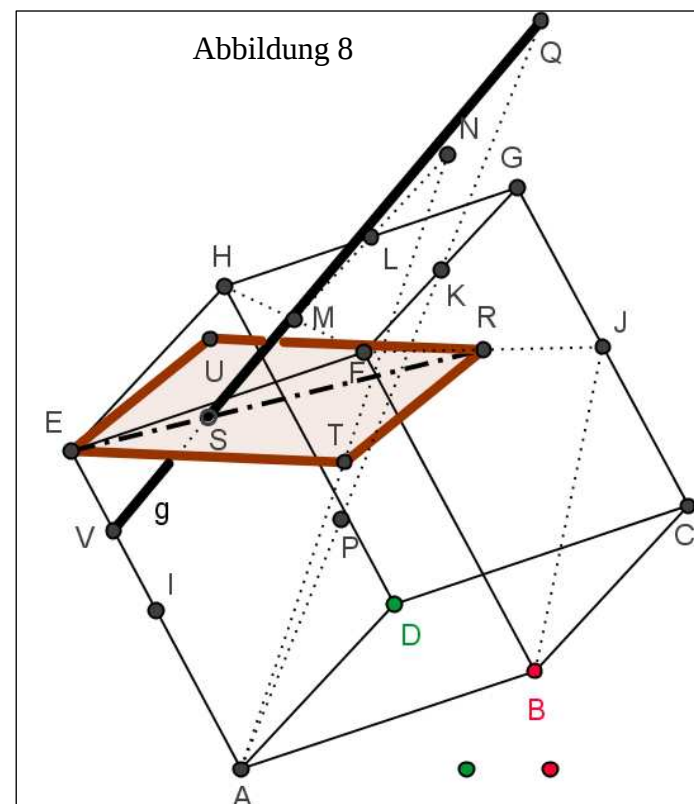


- 20) Abbildung 7: Würfel der Kantenlänge 216
Alle Punkte entstehen durch (sukzessive) Halbierung. Zeige, dass der Schnittwinkel zwischen der Ebene und der (fetten) Gerade 45° beträgt und der Schnittpunkt von Gerade und Ebene die Strecke, welche die Gerade repräsentiert, im Verhältnis 5:22 teilt.



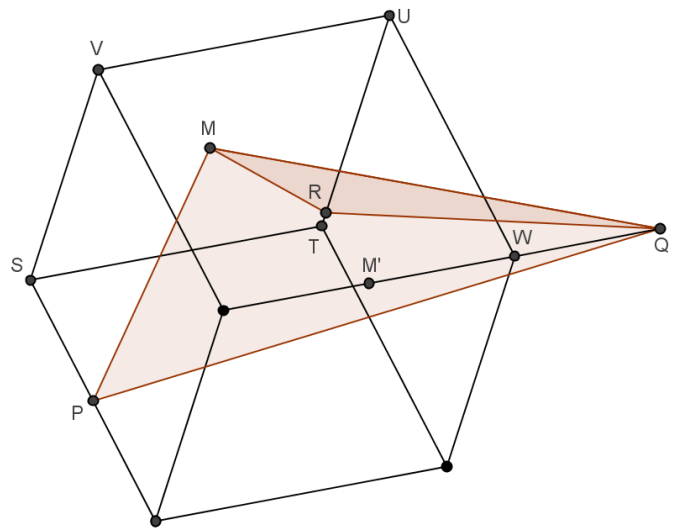
- 21) Abbildung 8: Würfel der Kantenlänge 12
I, J, K und L sind Kantenmittelpunkte, M ist ein Flächenmittelpunkt. N ist der Spiegel-punkt von M an L, P bzw. R bzw. T ist der Mittelpunkt der Strecke AK bzw. FJ bzw. AN. Q ist der Spiegelpunkt von P an K.

- a) Zeige, dass g mit der Ebene ϵ_{ETR} (welche der plastischeren Darstellung wegen bzgl. der Lagebeziehung zu g über das Dreieck ΔETR hinaus durch das Parallelogramm $ETRU$ repräsentiert wurde) einen Winkel von 30° einschließt!
b) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt $\{S\}=g \cap \epsilon_{ETR}$ die Länge der Strecke VQ ?
c) Zeige, dass S auf der Diagonale ER des Parallelogramms $ETRU$ liegt. In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale?

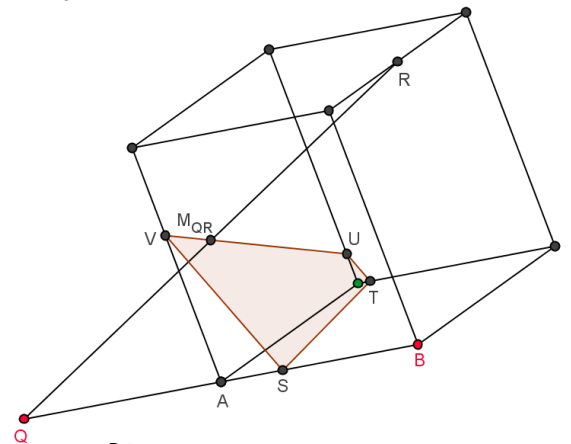


- 22) Abbildung 9: Würfel der Kantenlänge 8
P und Q sind Kantenmittelpunkte, R ist der Spiegel-punkt von G an C. Der Punkt S liegt eine Einheit in Richtung der z-Achse über P. Zeige, dass eines der beiden Dreiecke ΔAGP und ΔQRS gleichschenkelig bzw. rechtwinklig ist und dass die Trägerebenen der beiden Dreiecke aufeinander normal stehen!

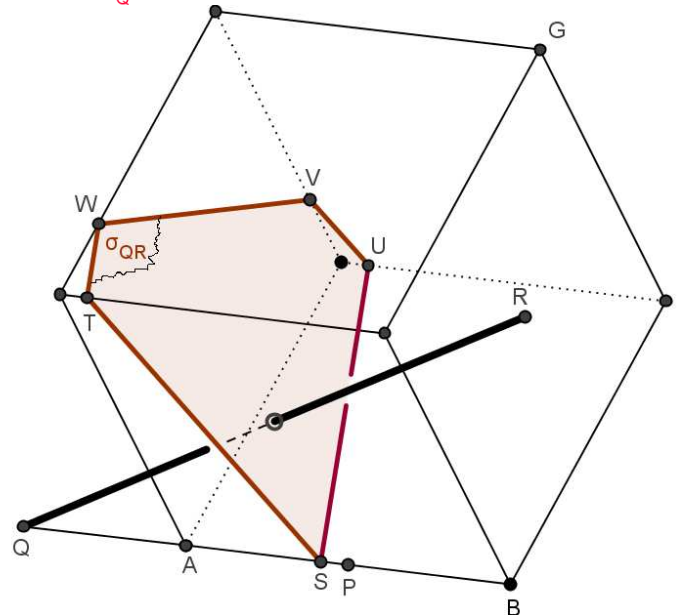
- 23) P und M' sind Kantenmittelpunkte, M ist der Flächenmittelpunkt des Quadrats STUV des abgebildeten Würfels (Seitenlänge 16). Q ist der Spiegelpunkt von M' an der Würfecke W, R liegt auf der Würfelkante TU, wobei $\overline{RT} = 1$ gilt. Zeige, dass die abgebildeten Dreiecke aufeinander normal stehen und setze deren Flächeninhalte in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!



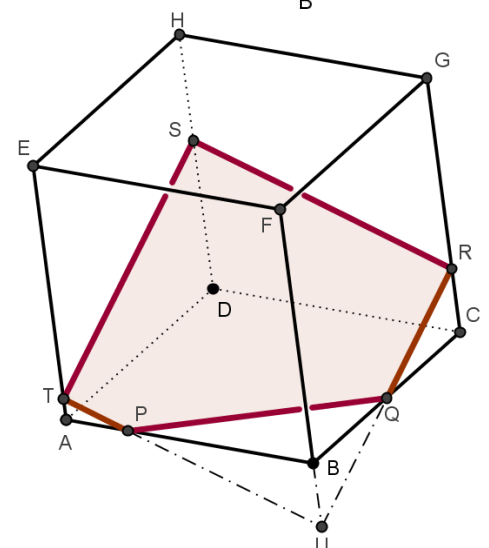
- 24) Würfel mit Seitenlänge 16:
Q ist der Spiegelpunkt von B an A,
R ist ein Kantenmittelpunkt,
 σ_{QR} ist die Symmetrieebene der Strecke QR
Zeige bzgl. des Schnittvierecks:
Es ist ein Trapez.
Der Mittelpunkt der Strecke QR liegt auf dem Schenkel VU (Gib das Teilverhältnis an!).
Ist das Trapez gleichschenkelig?
Zeige, dass der Flächeninhalt ziemlich genau 110 beträgt.



- 25) Würfel mit Seitenlänge 24:
P ist der Mittelpunkt der Kante AB.
R ist der Mittelpunkt der Diagonale BG.
Q ist der Spiegelpunkt von P an A.
 σ_{QR} ist die Symmetrieebene der Strecke QR.
Zeige bzgl. des Schnittfünfecks:
Flächeninhalt ca. 16477/36



- 26) Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 24): $Q = M_{BC}$
P und R entstehen durch Kantenviertelung, wobei P bzw. R von A bzw. C aus betrachtet der jeweils erste Teilungspunkt ist. Ermittle in einem selbst zu wählenden geeigneten Koordinatensystem die Lage der Schnittpunkte S und T der durch P, Q und R aufgespannten Ebene mit den Kanten DH und AE und berechne ferner den Flächeninhalt des Schnittfünfecks PQRST dieser Ebene mit dem Würfel. Ist das Parallelogramm RSTU gar eine Raute oder Quadrat? Begründe, warum U auf der Gerade durch B und F liegen muss und berechne den Flächeninhalt des Fünfecks PQRST!



- 27) Nebenstehend ist aus einem Würfel der Seitenlänge 42 ein regelmäßiges Tetraeder ABCD abgeleitet worden. R ist der Mittelpunkt der Kante CD, P entsteht durch Drittelung der Kante CA, wobei P von A aus betrachtet der erste Teilungspunkt ist. Bestätige anhand dieser speziellen Anordnung die folgenden Sätze:

Ist b das halbe harmonische Mittel von a und c , dann gilt:

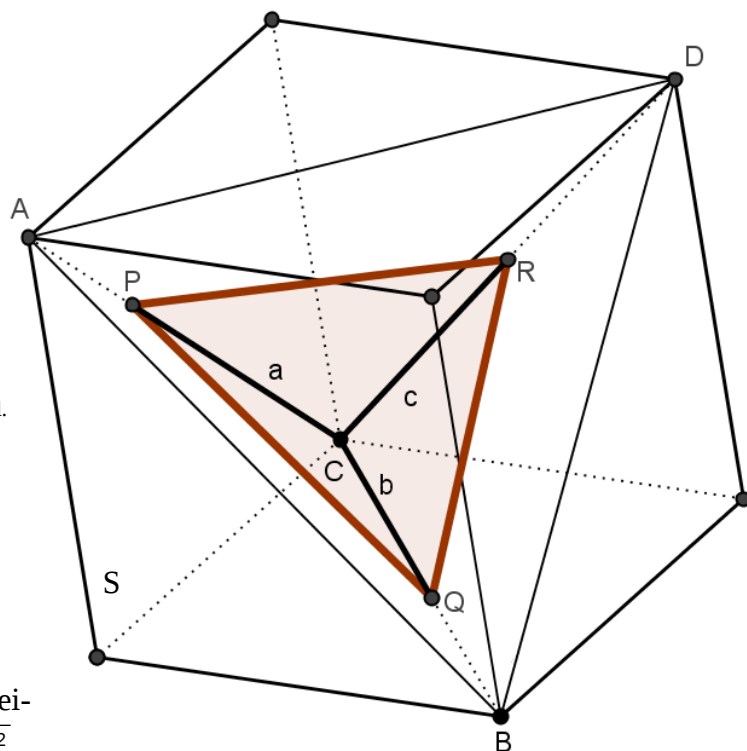
Satz 1. Die Ebene ε_{PQR} steht auf die Ebene ε_{CSB} normal.

Satz 2. $\overline{QR} : \overline{QP} = c : a$

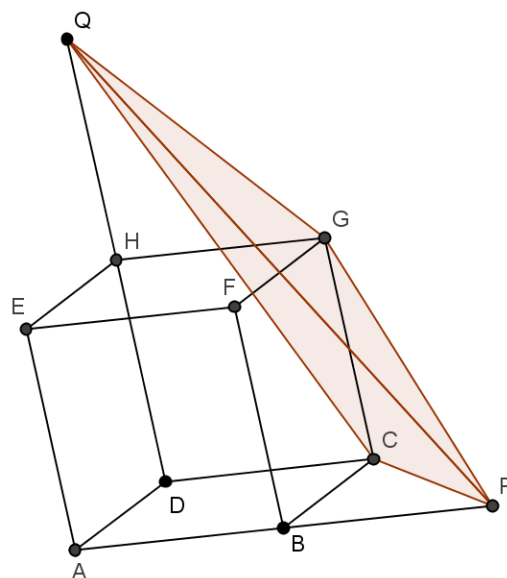
Satz 3. $b = \frac{c}{1 + \frac{QR}{QP}} = \frac{a}{1 + \frac{QP}{QR}}$

Satz 4. Für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔPQR gilt $\mu = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}$.

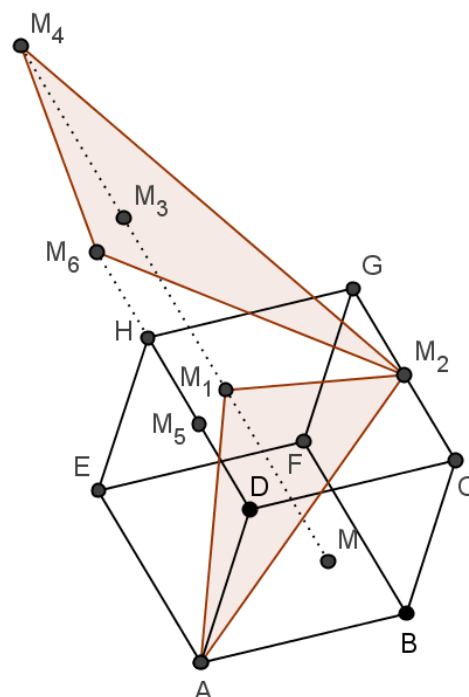
Zeige außerdem allgemein, dass die Sätze 2 und 3 zueinander äquivalent sind!



- 28) Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 2): P bzw. Q entsteht durch Spiegelung der Würfecke A an B bzw. D an H. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen ε_{PQC} und ε_{PQG} ! Ermittle das Verhältnis $k = \mu : \mu'$, wobei μ bzw. μ' den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQG bzw. ΔPQC bezeichnet und zeige ohne TR, dass $k = \frac{2}{3} \cdot \sin \varphi$ gilt!

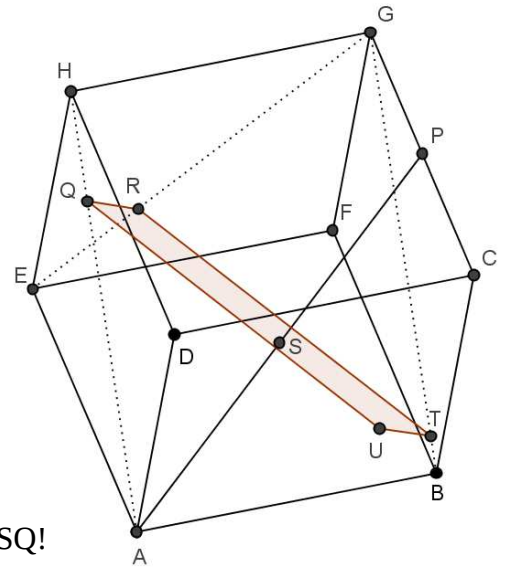


- 29) M bzw. M_1 ist der Mittelpunkt des Quadrats ABCD bzw. EFGH des Würfels ABCDEFGH (Seitenlänge 2), M_2 und M_5 sind Kantenmittelpunkte. M_6 ist der Spiegelpunkt von M_5 an H. M_4 entsteht durch fortlaufende Spiegelung von M an M_1 . Ermittle ohne Taschenrechner das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Ebenen durch einerseits die Punkte A, M_1 und M_2 und andererseits durch die Punkte M_2 , M_4 und M_6 !



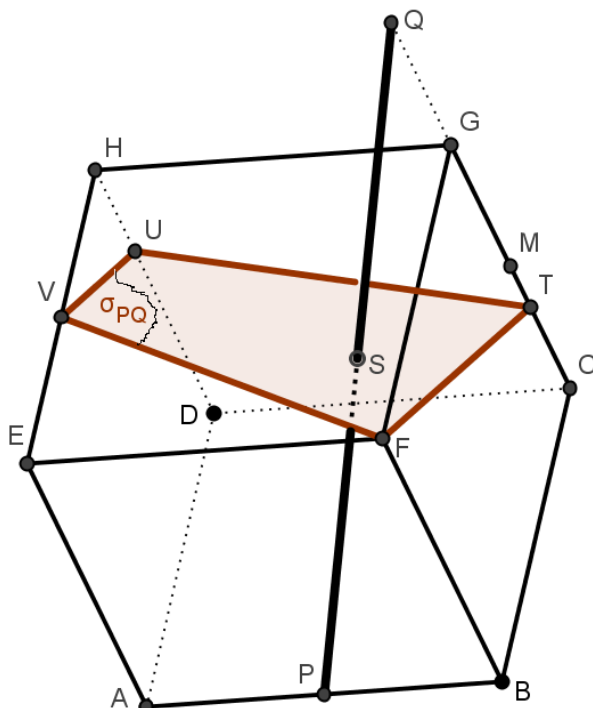
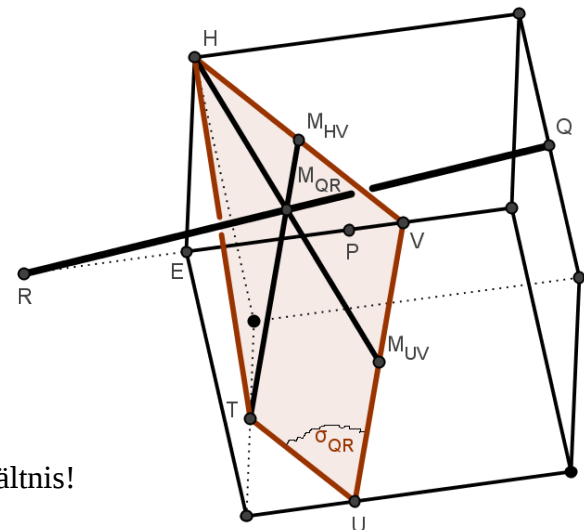
- 30) Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 48):
P ist der Mittelpunkt der Kante CG.
Die Symmetrieebene der Strecke AP
schneidet die Flächendiagonalen AH,
EG und BG in den Punkten Q, R und T.
Durch U wird das Dreieck QRT zum
Parallelogramm QRTU ergänzt.

- Berechne die Koordinaten von Q, R, T, U und vom Durchstoßpunkt der Gerade g_{AP} mit der Symmetrieebene.
- Ermittle den Flächeninhalt des Parallelogramms QRTU!
- Bestimme ohne Taschenrechner das Maß des Winkels $\sphericalangle RSQ$!



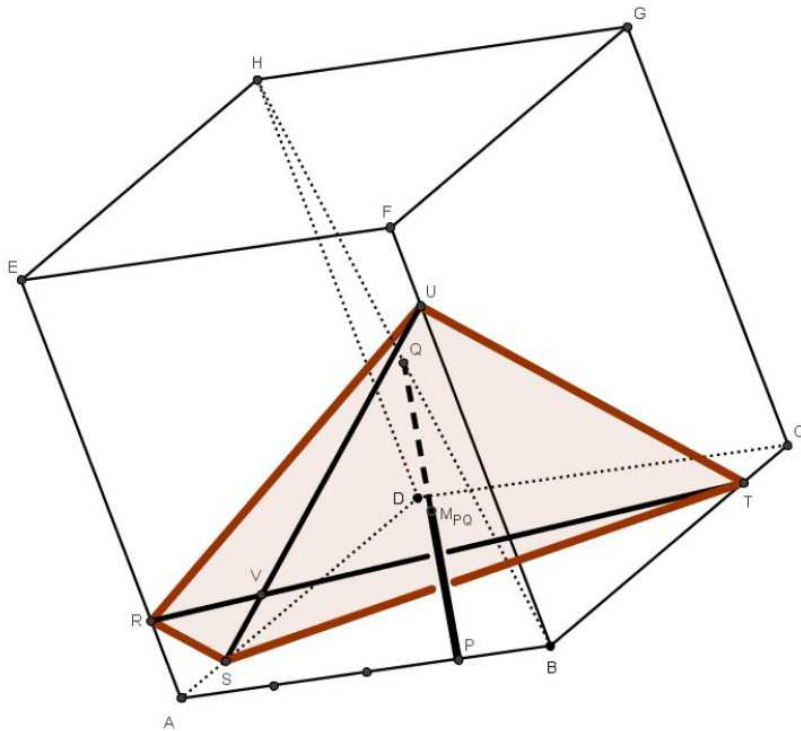
- 31) In der rechten Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 12 abgebildet. P und Q sind Kantenmittelpunkte, R ist der Spiegelpunkt von P am Würfeckeckpunkt E, σ_{QR} die Symmetrieebene der Strecke QR.

- Wie man zeigen kann, schneidet σ_{QR} nur sechs der zwölf Würfelkanten, wobei im Würfeckpunkt H drei Schnittpunkte zusammenfallen. Berechne die Koordinaten von T, U und V in einem geeigneten Koordinatensystem und zeige, dass $H \in \sigma_{QR}$ gilt!
- Zeige, dass die Geraden $g_{TM_{HV}}$ und $g_{HM_{UV}}$ einander in M_{QR} schneiden und beschreibe dessen Lage auf den entsprechenden Strecken jeweils durch ein Teilverhältnis!
- Begründe, dass es sich beim Schnittviereck HTUV um ein Trapez handelt. Kommentiere das Resultat $\mathcal{A}=134,7$ für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Trapezes!



- 32) Der links abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 6 auf. P und M sind Kantenmittelpunkte, Q ist der Spiegelpunkt von M an G. Zeige, dass die Symmetrieebene σ_{PQ} den Würfel längs des Trapezes FTUV schneidet und berechne seinen Flächeninhalt!

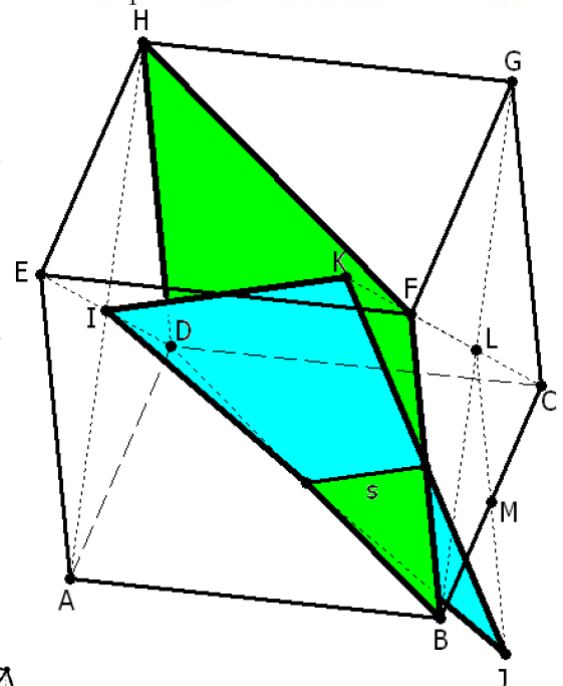
- 33) Links unten ist ein Würfel der Seitenlänge 64 abgebildet. P entsteht durch Viertelung der Würfelkante AB , der Punkt Q ist der Würfelmittelpunkt, also der Mittelpunkt aller Raumdiagonalen (somit insbesondere von BH).



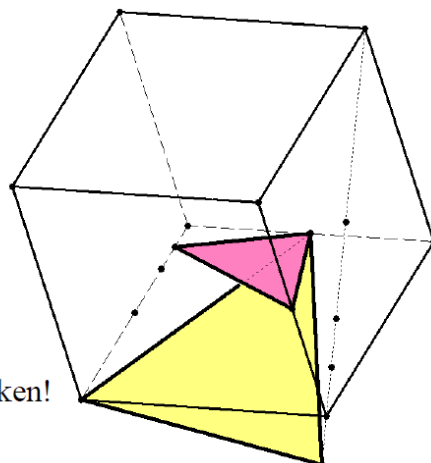
- Wähle ein passendes Koordinatensystem, zeichne es in die Abbildung ein und gib die Koordinaten von P und Q an!
- Stelle eine Gleichung der Symmetrieebene σ_{PQ} der Strecke PQ auf!
- Als Schnittfigur von σ_{PQ} mit der Würfeloberfläche entsteht das Viereck $RSTU$. Begründe, warum es sich dabei um ein Trapez handelt und zeige, dass es gleichschenkelig ist.
- Zeige ohne Taschenrechner, dass der Flächeninhalt des Trapezes mehr als $\frac{1}{10}$, aber weniger als $\frac{1}{8}$ der Würfeloberfläche ausmacht!
- Zeige, dass V die Diagonalen des Trapezes im Verhältnis 1 : 3 teilt!

- 34) Die Seitenlänge des abgebildeten Würfels beträgt 4. M ist ein Kantenmittelpunkt, I und L sind Flächenmittelpunkte. J bzw. K ist der Spiegelpunkt von L an M bzw. von L an F .

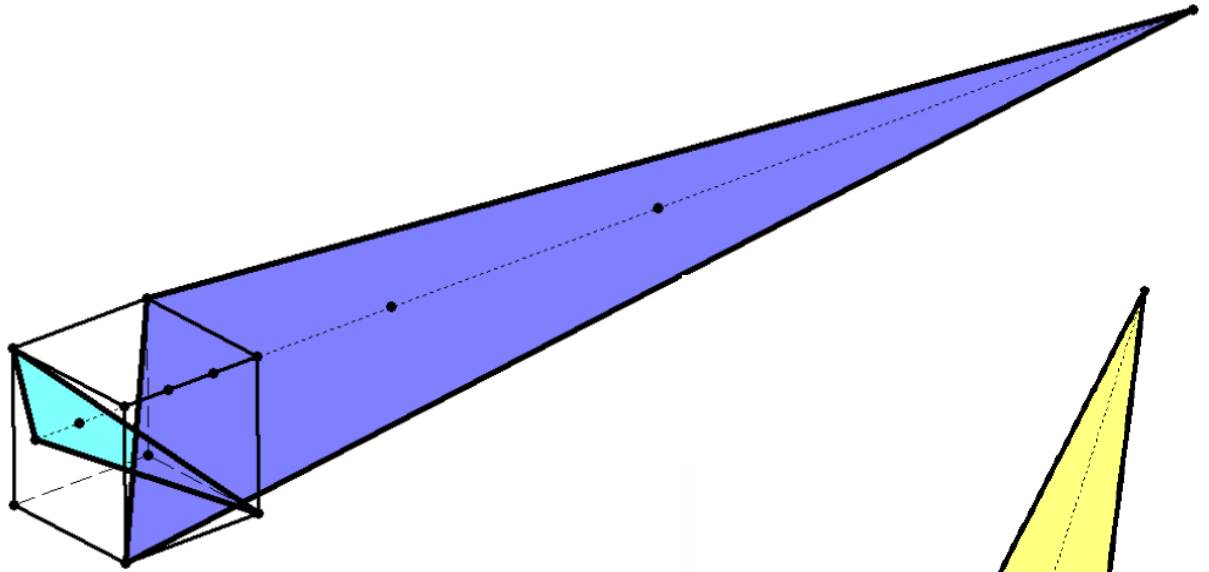
- Zeige, dass die beiden gefärbten Ebenen einander unter 30° schneiden und ermittle eine Parameterdarstellung ihrer Schnittgeraden s sowie deren Schnittpunkte mit der Würfelkante BF sowie der Flächendiagonale BD .
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene ε_{IJK} mit den Würfelkanten BC und EF !
- Zeige, dass ε_{IJK} die Symmetrieebene der Strecke AM_{DG} ist!



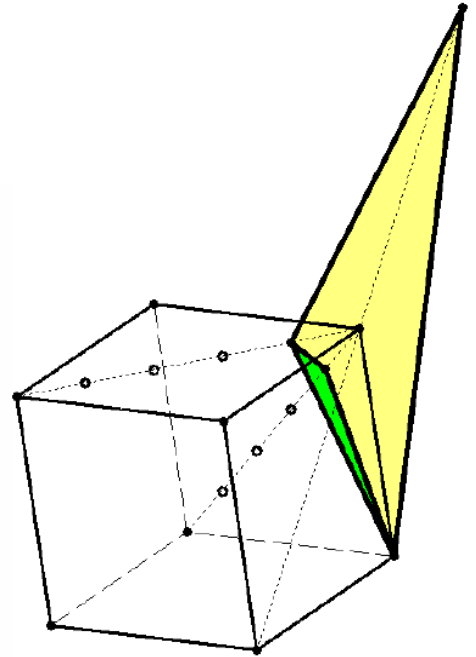
- 35) Die aus dem nebenstehend abgebildeten Würfel der Kantenlänge 8 abgeleiteten Punkte entstehen alle durch sukzessive Streckenhalbierung sowie eine Spiegelung. Ermittle das Maß des Schnittwinkels zwischen den beiden eingezeichneten Dreiecken!



- 36) Die aus dem unten abgebildeten Würfel der Kantenlänge 3 abgeleiteten Punkte entstehen alle durch fortlaufende Streckendrittung sowie sukzessive Spiegelung. Ermittle das Maß eines Schnittwinkels zwischen den Trägerebenen der beiden eingezeichneten Dreiecke!



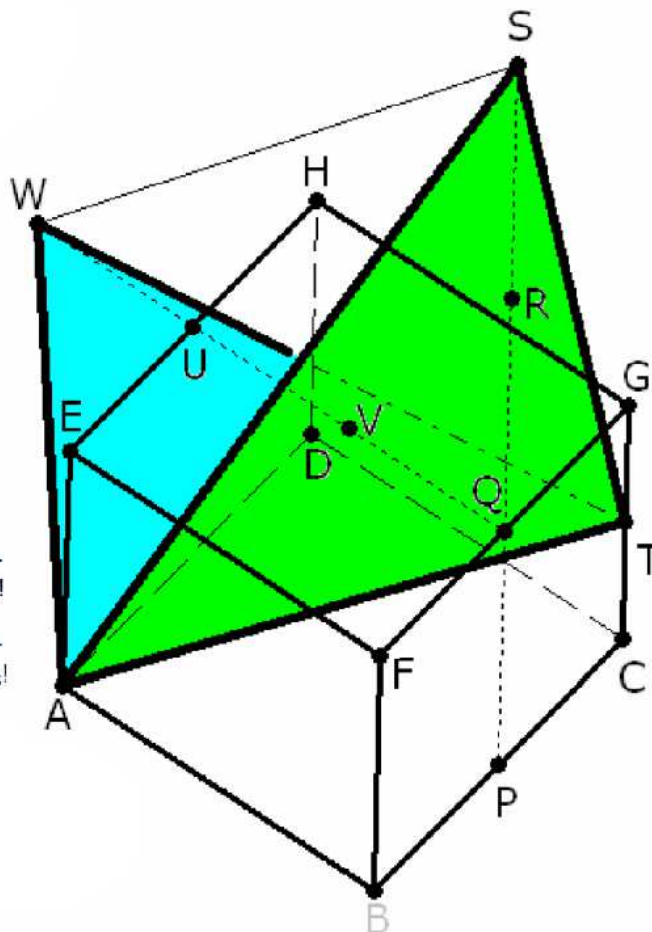
- 37) Die aus dem rechts abgebildeten Würfel der Kantenlänge 5 abgeleiteten Punkte entstehen alle durch fortlaufende Streckenfünftelung sowie eine Spiegelung. Ermittle das Maß eines Schnittwinkels zwischen den Trägerebenen der beiden eingezeichneten Dreiecke



Die Aufgaben 38) & 39) beziehen sich auf die rechte Figur, wo ein Würfel $ABCDEFGH$ der Seitenlänge 2 abgebildet ist. P, Q, T und U sind Kantenmittelpunkte. V ist der Mittelpunkt der Strecke QU , W ist der Spiegelpunkt von V an U . R ist der Spiegelpunkt von P an Q , S jener von Q an R .

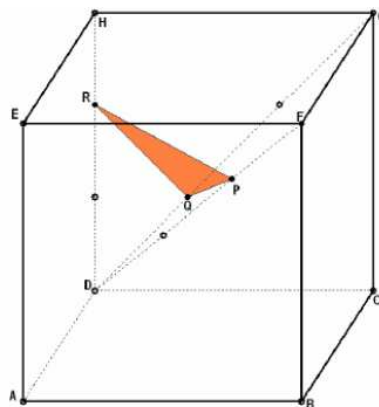
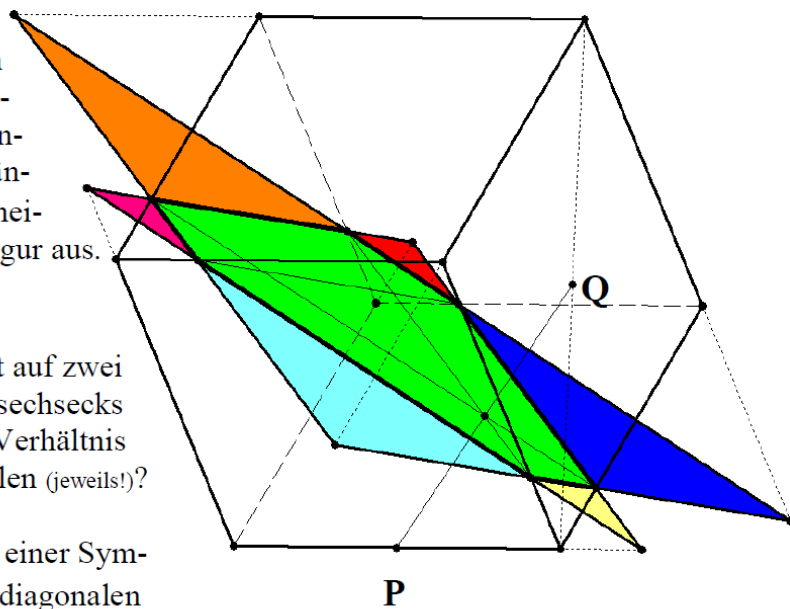
- 38) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Ebenen ϵ_{ATS} und ϵ_{ATW} !

- 39) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Ebenen ϵ_{AWS} und ϵ_{TWS} !

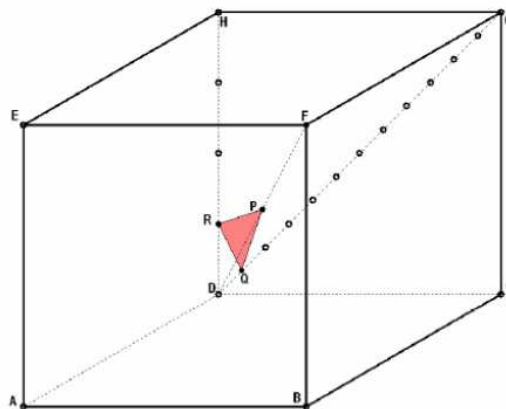


Die Aufgaben 40) bis 43) beziehen sich allesamt auf die rechte Abbildung, wobei P bzw. Q ein Kanten- bzw. Flächenmittelpunkt eines Würfels der Seitenlänge 8 ist. Die Symmetrieebene σ_{PQ} schneidet aus dem Würfel die abgebildete Figur aus.

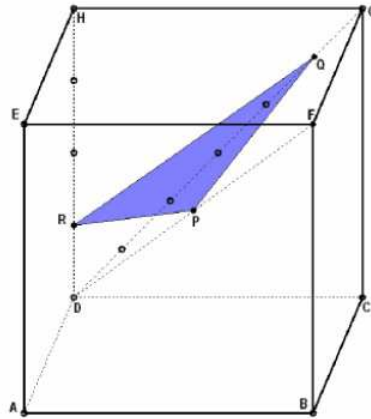
- 40) Zeige, dass M_{PQ} wie abgebildet auf zwei Diagonalen des grünen Schnittsechsecks zu liegen kommt. In welchem Verhältnis teilt M_{PQ} diese beiden Diagonalen (jeweils)?
- 41) Wird der Würfel hingegen von einer Symmetrieebene einer seiner Raumdiagonalen (z.B. zu der zu g_{PQ} parallelen) geschnitten, so entsteht (Zeige dies!) ein regelmäßiges Sechseck. Zeige, dass der Flächeninhalt des abgebildeten grünen Sechsecks $\frac{11}{12}$ des Flächeninhalts des regelmäßigen Sechsecks beträgt.
- 42) Zeige, dass die Flächeninhalte der beiden blauen und des orangen Dreiecks gleich sind!
- 43) Zeige, dass die Flächeninhalte des beige, roten und rosa Dreiecks gleich sind!



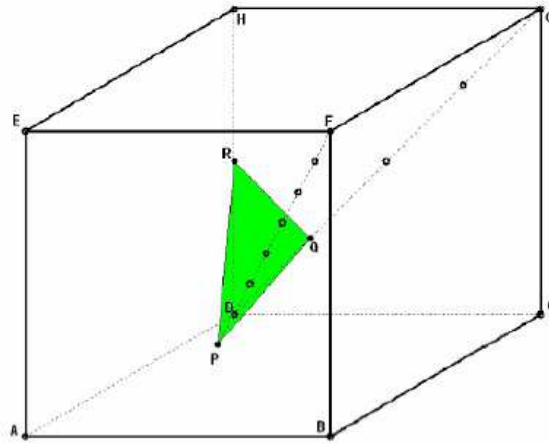
- 44) Der in obiger Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 3 auf, die Punkte P , Q und R entstehen entsprechend durch Drittelungen der Raumdiagonale DF , der Flächendiagonale DG sowie der Kante DH . Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle PQR$!



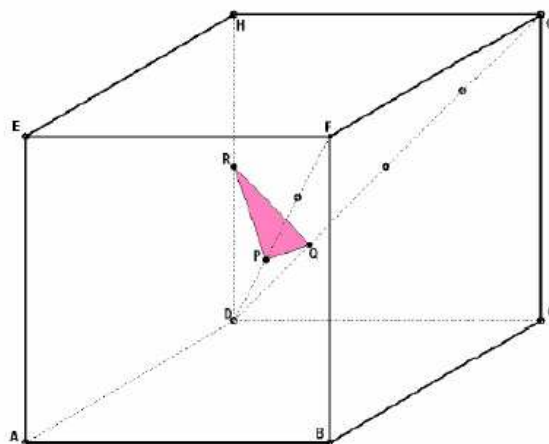
- 45) Der in obiger Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 12 auf, die Punkte P , Q und R entstehen durch Halbierung bzw. Zwölftelung bzw. Viertelung der Raumdiagonale DF bzw. der Flächendiagonale DG bzw. der Kante DH . Zeige, dass das Dreieck $\triangle PQR$ rechtwinklig ist!



- 46) Der in obiger Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 12 auf, die Punkte P , Q und R entstehen durch Halbierung bzw. Sechstelung bzw. Viertelung der Raumdiagonale DF bzw. der Flächendiagonale DG bzw. der Kante DH . Zeige, dass das Dreieck $\triangle PQR$ rechtwinklig

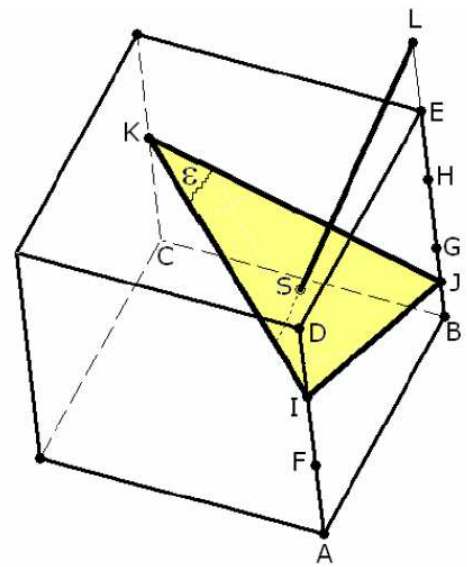


- 47) Der in obiger Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 12 auf, die Punkte P , Q und R entstehen durch (im Falle von P : fortlaufende) Sechstelung bzw. Viertelung bzw. Halbierung der Raumdiagonale DF bzw. der Flächendiagonale DG bzw. der Kante DH . Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle PQR$!



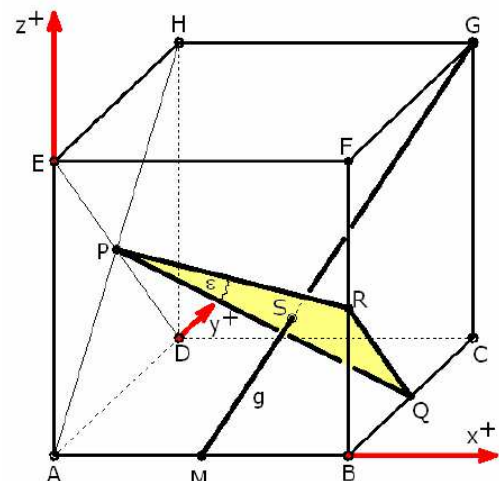
- 48) Der in obiger Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 12 auf, die Punkte P , Q und R entstehen durch Drittelung bzw. Viertelung bzw. Halbierung der Raumdiagonale DF bzw. der Flächendiagonale DG bzw. der Kante DH . Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle PQR$!

49) Nebenstehender Würfel weist eine Seitenlänge von 42 auf. Die Punkte F, G, H und I entstehen durch Kantendrittung. J und K entstehen durch Streckenhalbierung, L durch Spiegelung (von H an E). Berechne den Normalabstand von L zu ε (unter Verwendung des Lotfußpunkts S von L bezüglich ε).



50) Im nebenstehend abgebildeten Würfel (Kantenlänge 6) ist P der Mittelpunkt des Begrenzungsquadrats ADHE. Bei M, Q und R handelt es sich um entsprechende Kantenmittelpunkte.

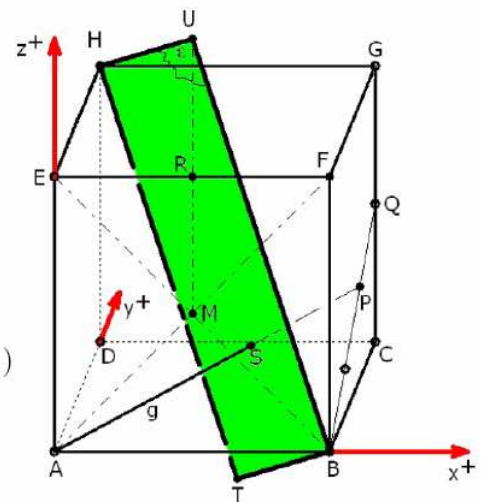
- Zeige, dass $\triangle PQR$ gleichschenkelig ist und gib inkl. Begründung Basis oder Spitze an!
- Stelle eine Gleichung der Ebene ε auf!
- Ermittle die Koordinaten des Durchstoßpunkts $\{S\} = g \cap \varepsilon$. In welchem Verhältnis teilt S die Länge der Strecke MG?
- Begründe, warum g auf ε normal steht!
- Verifiziere, dass S (auch) der Schwerpunkt von $\triangle PQR$ ist!



51) Die rechte ... Skizze zeigt einen Würfel der Kantenlänge 42.

- Q bzw. R ist der Mittelpunkt der Würfelkante CG bzw. EF .
- P entsteht durch Drittelung der Strecke BQ .
- M ist der Mittelpunkt des Quadrats $ABFE$.
- U ist der Spiegelpunkt von M an R .
- ε ist die Ebene durch die Punkte B , U und H . (Der plastischeren Darstellung wegen wurde das Dreieck $\triangle BUH$ zum Parallelogramm $BUHT$ ergänzt. T wird in weiterer Folge jedoch nicht relevant sein.)
- g ist die Gerade durch die Punkte A und P .

- Berechne die Koordinaten des Durchstoßpunkts $\{S\} = g \cap \varepsilon$!
- In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AP (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Zeige, dass g auf ε normal steht!



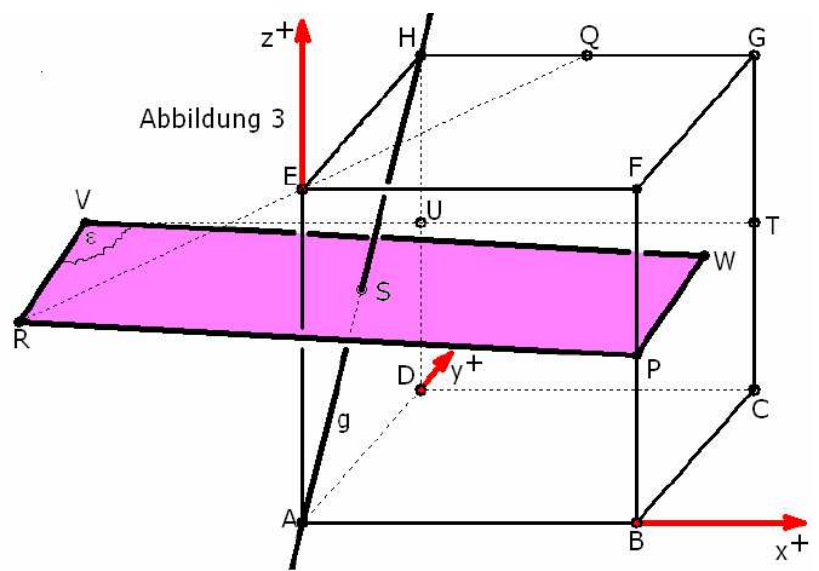
52) Der Würfel in Abbildung 3 weist eine Seitenlänge von 2 auf. P, Q, T und U sind Kantenmittelpunkte. R bzw. V ist der Spiegelpunkt von Q an E bzw. von T an U.

a) Ermittle das Maß des spitzen

Schnittwinkels $\alpha = \angle(g, \varepsilon)$!

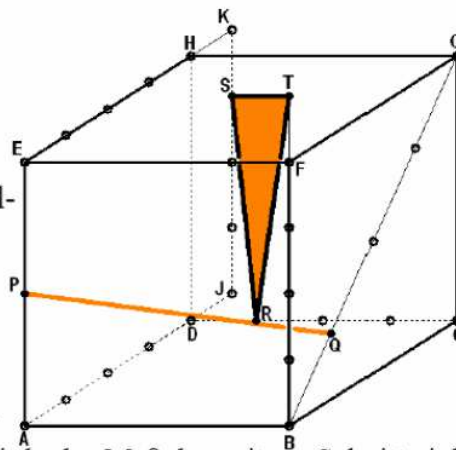
b) Verifiziere, dass der Schnittpunkt $\{S\} = g \cap \varepsilon$ sowohl der Diagonalschnittpunkt des Parallelogramms RPWV als auch der Mittelpunkt der Flächendiagonale AH ist!

c) Zeige, dass W in π_1 liegt!

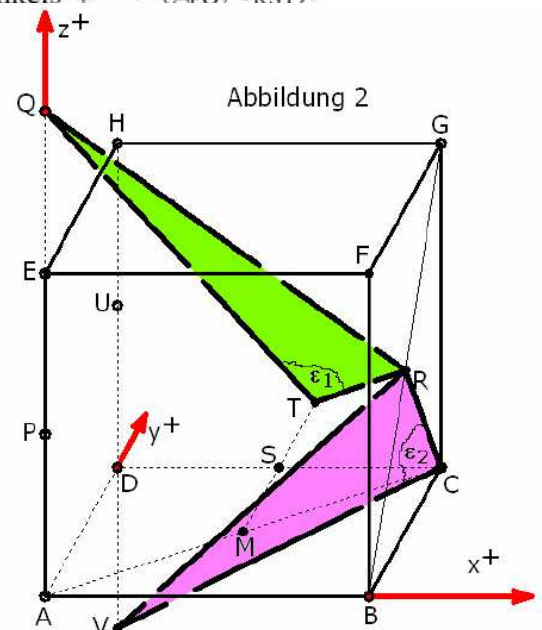


53) Im unmittelbar rechts abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Kantenlänge 4) ist P der Mittelpunkt der Kante AE. Q und R (bzw. T) entsteht durch (fortlaufende) Viertelung von BG und CD (bzw. BF). K und J gehen aus AD und EH durch sukzessive Viertelung, S durch

Viertelung von JK hervor. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels $\varphi = \angle(g_{PO}, \varepsilon_{RST})$!

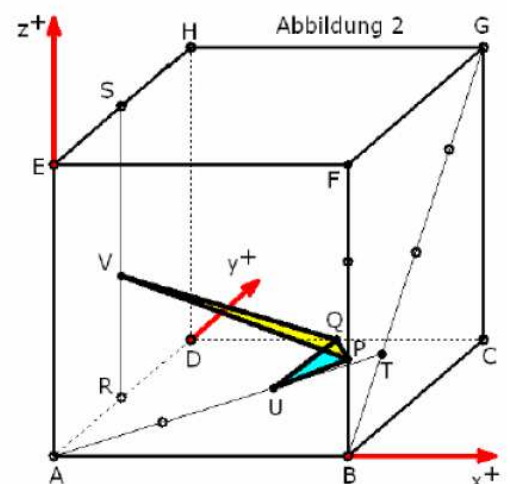


54) Der Würfel in Abbildung 2 weist eine Seitenlänge von 2 auf. P, S und U sind Kantenmittelpunkte, bei M und R handelt es sich um Flächenmittelpunkte. Q ist der Spiegelpunkt von P an E, T der Spiegelpunkt von M an S und schließlich V der Spiegelpunkt von U an D. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels $\beta = \angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$!

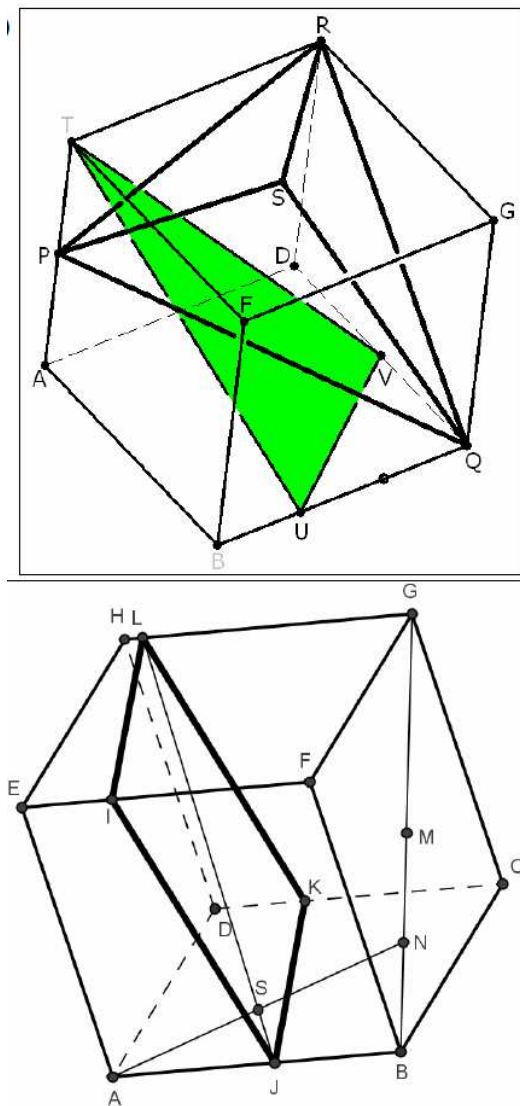


55) In Abbildung 2 ist ein Würfel der Seitenlänge 12 illustriert. P bzw. Q entsteht durch Drittelung bzw. Halbierung der Würfelkante CD bzw. BF. T geht durch Viertelung der Flächendiagonale BG hervor. U ist das Resultat einer Drittelung der Strecke AT. R bzw. S ist der Kantenmittelpunkt der Würfelkante AD bzw. EH. V geht aus einer Zwölftelung der Strecke RS hervor und ist von R aus betrachtet der fünfte Teilungspunkt.

Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels β zwischen den Ebenen ε_{PQU} und ε_{QV} !



56)



Ausgehend von einem Würfel der Kantenlänge 12 werden in der linken Abbildung ferner die Kantenmittelpunkte P und V, der Deckflächenmittelpunkt S sowie jener abgebildete Punkt U betrachtet, welcher sich durch Drittelung der Kante BQ ergibt.

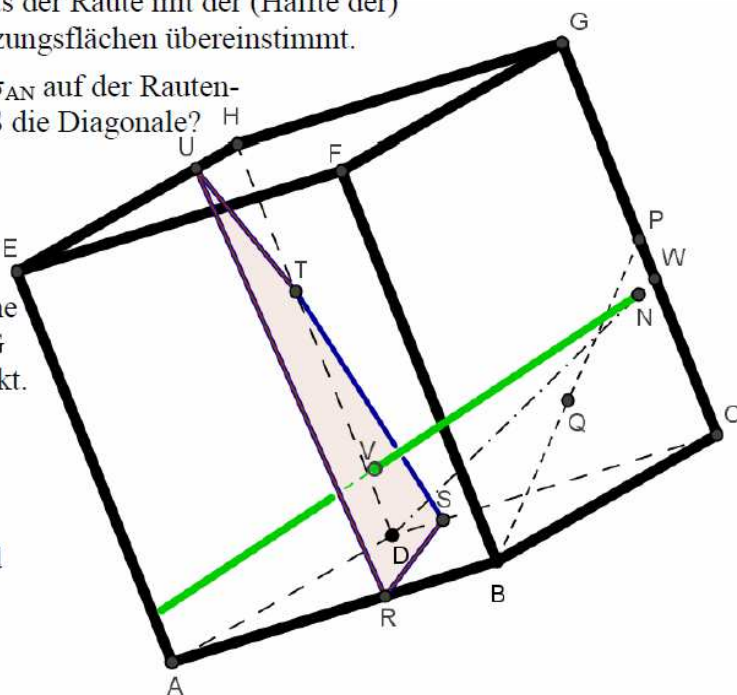
- Zeige, dass es sich bei PQRS um eine sogenannte "rechtwinklige" dreiseitige Pyramide handelt, d.h. dass die (in diesem Fall!) von S ausgehenden Kanten paarweise aufeinander normal stehen und begründe, warum dann auch die Ebenen ε_{PQS} , ε_{QRS} und ε_{PRS} (Trägerebenen der "Kathetenflächen" der rechtwinkligen Pyramide PQRS, entsprechend wird ε_{PQR} dann als Trägerebene der "Hypotenusenfläche" bezeichnet) paarweise aufeinander normal stehen.
- Für jede rechtwinklige Pyramide mit den Kathetenflächeninhalten K_1 , K_2 und K_3 sowie dem Hypotenusenflächeninhalt H gilt [in Verallgemeinerung des bekannten Lehrsatzes von PYTHAGORAS (in 2D)] der **PYTHAGOREISCHE Lehrsatz in 3D**: $K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = H^2$. Überprüfe dies am konkreten Beispiel!
- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen der Trägerebene der Hypotenusenfläche der Pyramide PQRS und der Ebene ε_{TUV} !
- Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade g der Ebenen aus c) und zeige, dass der Mittelpunkt der Strecke TV auf g liegt!
- Wie kann man die in d) zu überprüfende Inzidenz ohne Verwendung der Parameterdarstellung von g nachweisen? Führe diesen alternativen Nachweis durch!

57) Der links oben abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 16 auf. M ist der Mittelpunkt der Flächendiagonale BG, N ist der Mittelpunkt der Strecke BM.

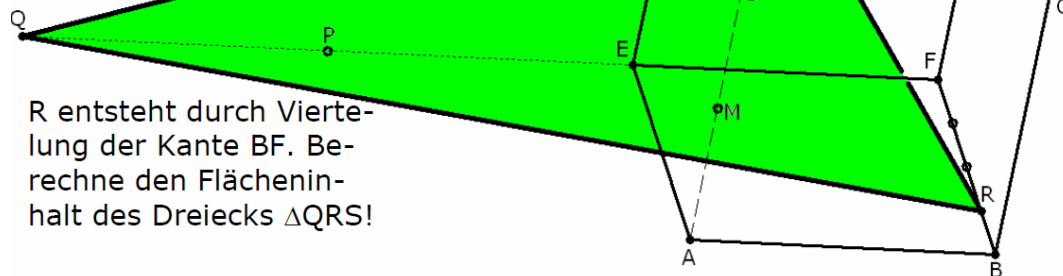
- Zeige, dass die Symmetrieebene σ_{AN} den Würfel längs einer Raute IJKL schneidet.
- Weise nach, dass die Maßzahl des Flächeninhalts der Raute mit der (Hälfte der) Summe der Diagonallängen aller Würfelbegrenzungsflächen übereinstimmt.
- Zeige, dass der Durchstoßpunkt S von g_{AN} mit σ_{AN} auf der Rauteendiagonale JL liegt. In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale?

58) Der rechts abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 32. P ist der Mittelpunkt der Kante CG, Q der Mittelpunkt der Strecke BP, σ_{AQ} die Symmetrieebene letzterer. W entsteht durch Fünftelung der Kante CG und ist von C aus betrachtet der zweite Teilungspunkt. N geht durch Sechzehntelung von DW hervor und ist von W aus betrachtet der erste Teilungspunkt.

- Stelle eine Gleichung von σ_{AQ} auf!
- Zeige, dass σ_{AQ} nur die Kanten AB, CD, DH und EH schneidet und berechne die Koordinaten der eingezeichneten Schnittpunkte R, S, T und U!
- Zeige, dass die Gerade durch den Schwerpunkt V des Dreiecks ΔRST und N auf σ_{AQ} normal steht!
- Berechne den Flächeninhalt des Schnittvierecks RSTU von σ_{AQ} mit dem Würfel!

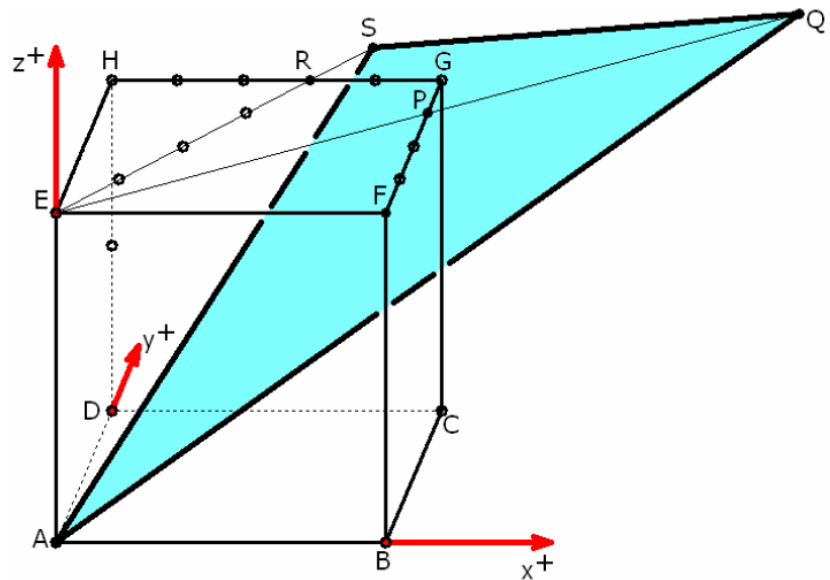


- 59) Der Würfel in nebenstehender Abbildung weist eine Seitenlänge von 4 auf. P ist der Spiegelpunkt der Würfecke F an der Würfecke E, Q der Spiegelpunkt von E an P. M ist der Mittelpunkt der Kante AD, S der Spiegelpunkt von M an der Würfecke D.



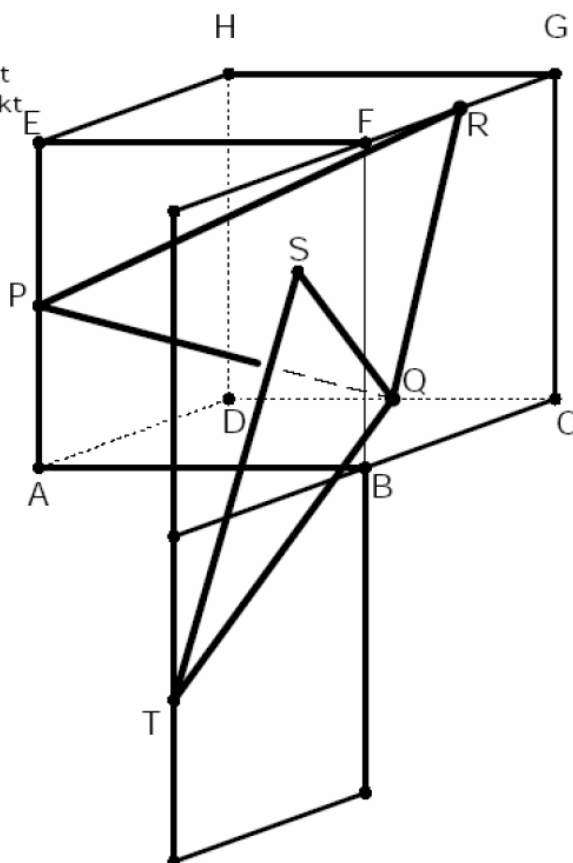
R entsteht durch Viertelung der Kante BF. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle QRS$!

- 60) Das Dreieck $\triangle AQS$ in nebenstehender Abbildung leitet sich wie folgt aus einem Würfel der Kantenlänge 20 ab: P entsteht durch Viertelung der Kante FG, Q ist der Spiegelpunkt von E an P. R geht aus einer Fünftelung der Kante GH hervor, S durch fortlaufende Viertelung der Strecke ER. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AQS$!



- 61) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Kantenlänge 2) sind P, Q und R Kantenmittelpunkte. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle PQR$. T ist der Mittelpunkt einer entsprechenden Seite eines angefügten Mantelquadrats.

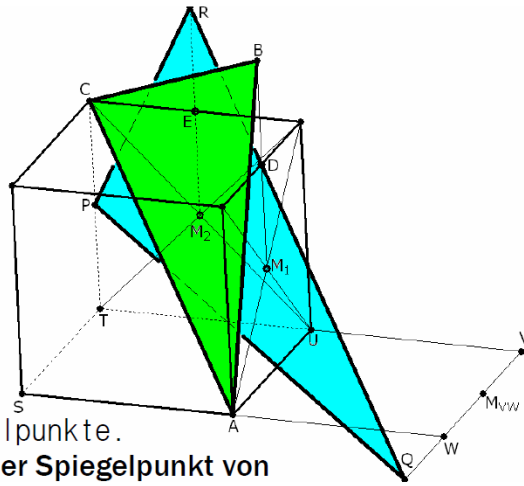
- Zeige, dass für den spitzen Schnittwinkel φ zwischen den Ebenen ε_{PQR} und ε_{QST} die Gleichung $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.
- Zeige, dass die Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle QST$ den gleichen Flächeninhalt aufweisen.
- Zeige, dass der Winkel j aus a) auch der Schnittwinkel zweier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders ist!



- 62) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 2 zusammen mit seinen Eckpunkten A, C, S, T und U abgebildet.

D, E und P sind Kantenmittelpunkte, M_1 und M_2 sind Flächenmittelpunkte.

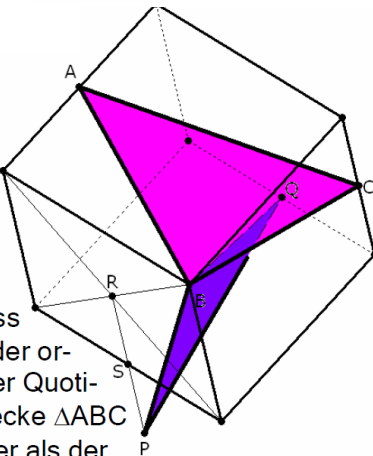
B bzw. R bzw. V bzw. W ist der Spiegelpunkt von M_1 an D bzw. von M_2 an E bzw. von T an U bzw. von S an A. Schließlich ist Q der Spiegelpunkt von M_{VW} an W.



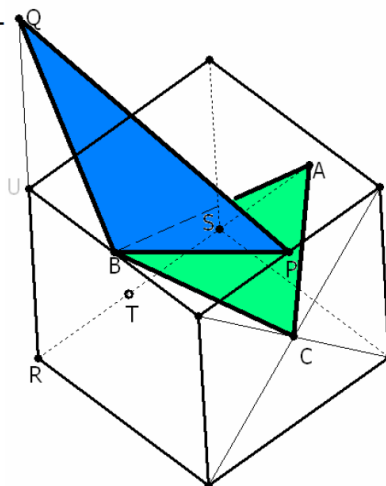
- a) Zeige, dass die Ebenen ε_{ABC} und ε_{PQR} zueinander parallel liegen.

- b) Setze die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle PQR$ in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis.

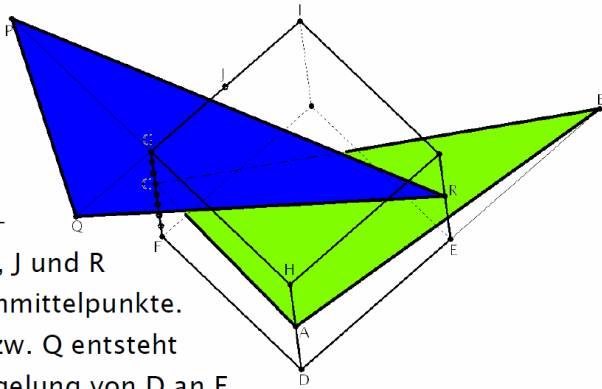
- 63) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 2 abgebildet. A, C, Q und S sind Kantenmittelpunkte, R ist ein Flächenmittelpunkt, P ist der Spiegelpunkt von R an S. Zeige jeweils ohne Taschenrechner, dass die Ebenen ε_{ABC} und ε_{BPQ} einander orthogonal schneiden und dass der Quotient der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BPQ$ nur geringfügig größer als der (Co-)Sinus des halben Schnittwinkels der beiden Ebenen ist!



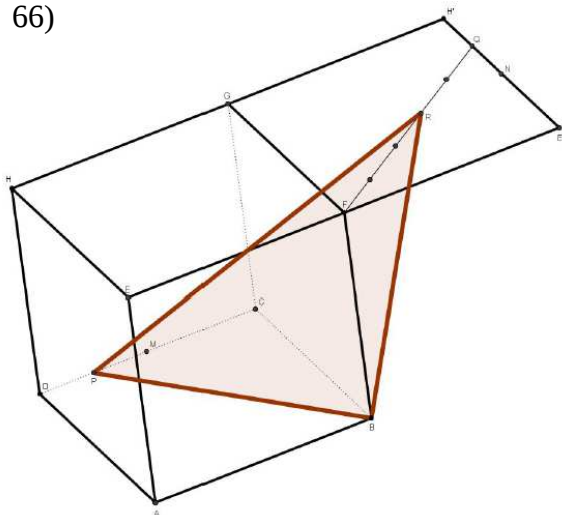
- 64) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 2 abgebildet. B, P und T sind Kantenmittelpunkte, C ist ein Flächenmittelpunkt. A bzw. Q ist der Spiegelpunkt von T an S bzw. von R an U. Zeige jeweils ohne Taschenrechner, dass der Schnittwinkel φ der Ebenen ε_{ABC} und ε_{BPQ} exakt 90° beträgt und dass der Quotient der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BPQ$ nur geringfügig kleiner als der Tangens von $\frac{2\varphi}{3}$ ist.



- 65) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 8 abgebildet. A, J und R sind Kantenmittelpunkte. B bzw. P bzw. Q entsteht durch Spiegelung von D an E bzw. von H an G bzw. von J an G. C entsteht durch Achtelung der Kante FG und ist von G aus betrachtet der dritte Teilungspunkt. Zeige, dass die Ebenen ε_{ABC} und ε_{PQR} zueinander parallel verlaufen und setze die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle PQR$ in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis.



66)

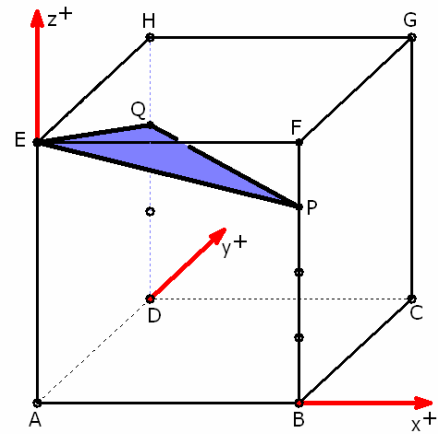


Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 20 auf. M ist ein Kantenmittelpunkt, P der Mittelpunkt der Strecke DM . Der Punkt E' bzw. H' entsteht durch Spiegelung von E an F bzw. von H an G , N ist der Mittelpunkt der Strecke $E'H'$, Q jener von NH' . Schließlich geht R aus einer Fünftelung der Strecke FQ hervor. Zeige unter Verwendung des *Orthogonalitätskriteriums*, dass das Dreieck $\triangle PBR$ rechtwinklig ist!

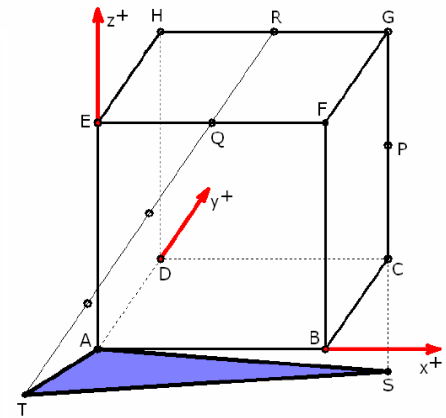
- 67) Die Perspektive der Konfiguration aus der letzten Aufgabe wurde bewusst so gewählt, der der nachzuweisende rechte Winkel auch als solcher erscheint. Was man anhand der obigen Abbildung jedoch kaum vermuten würde, ist, dass der Schnittpunkt $\{S\} = \varepsilon_{PBR} \cap g_{EF}$ derart auf der Strecke FE' liegt, sodass die Gerade g_{RS} fast parallel zu g_{FG} verläuft.¹ Zeige genauer, dass die Winkel zwischen g_{RS} und g_{FG} ziemlich genau um $3^\circ 10' 47\frac{7}{18}''$ vom rechten Winkel abweichen und kontrolliere außerdem die Gültigkeit der Identität $\overline{SP}^2 + 63 \cdot \overline{SR}^2 = 12 \cdot \overline{SB}^2$ ("Pythagoras-Ersatz-Gleichung").
- 68) Im Rahmen der letzten beiden Aufgaben hat sich bislang herausgestellt, dass die Ebene ε_{PBR} von den zwölf Würfelkanten jedenfalls vier Kanten schneidet (CD sowie die drei in B zusammenlaufenden Würfelkanten) sowie eine nicht schneidet (nämlich EF). Zeige, dass von den verbleibenden sieben Kanten genau eine von ε_{PBR} geschnitten wird ($\rightarrow$ Schnittpunkt T) und kontrolliere, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle PBT$ exakt 80% des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle PBR$ beträgt.

¹Von jener matheprof-undersite (<http://matheprof.at/8B201314Uebersicht.html>), auf der sich dieses File befindet, kannst du ein GeoGebra-File downloaden, welches es durch Bewegung eines roten und grünen Punktes sowie der Punkte B und D gestattet, die Perspektive entsprechend zu ändern.

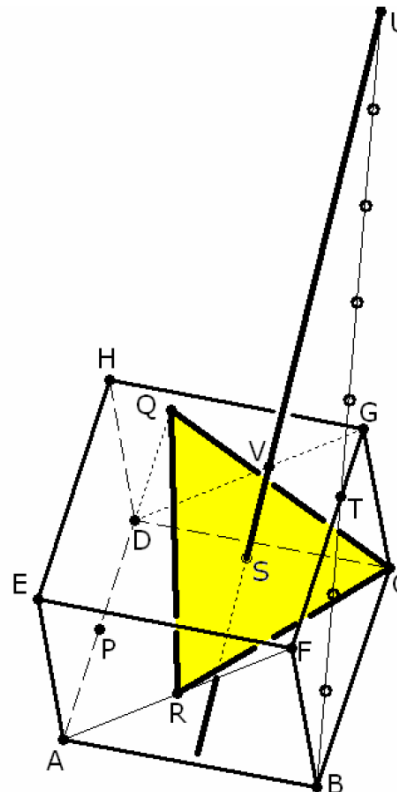
69) Berechne den Flächeninhalt des in nebenstehender Figur abgebildeten Dreiecks $\triangle EPQ$ (wobei der zugrundeliegende Würfel eine Seitenlänge von 12 aufweist und der Punkt P bzw. Q durch Kantenviertelung von BF bzw. Kantendrittelung von DH entsteht)!



70) Der rechts unten abgebildete Würfel weist eine Kantenlänge von 4 auf. P, Q und R sind allesamt Kantenmittelpunkte. S ist der Spiegelpunkt von P an der Würfecke C. T entsteht durch fortlaufende Spiegelung von R an Q (siehe Abbildung!). Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AST$!



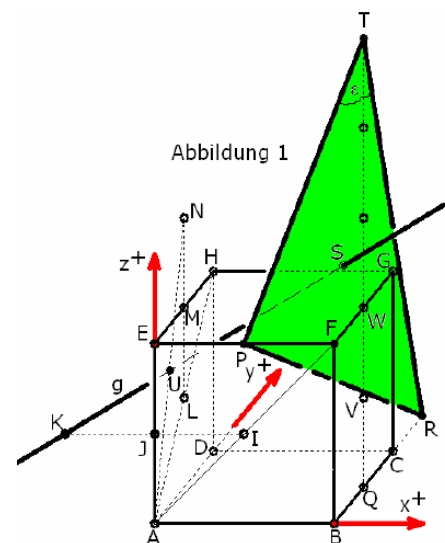
71) Der Würfel in nebenstehender Abbildung weist eine Seitenlänge von 48 auf. P bzw. R ist der Mittelpunkt der Würfelkante AD bzw. der Flächendiagonale AF, Q ist der Spiegelpunkt von P an der Würfecke D. T entsteht durch Sechzehntelung der Würfelkante FG und ist von F aus betrachtet der elfte Teilungspunkt. U entsteht durch fortlaufende Drittelung der Strecke BT. Schließlich geht V aus einer Zwölftelung der Flächendiagonale DG hervor und ist von D aus betrachtet der siebente Teilungspunkt.



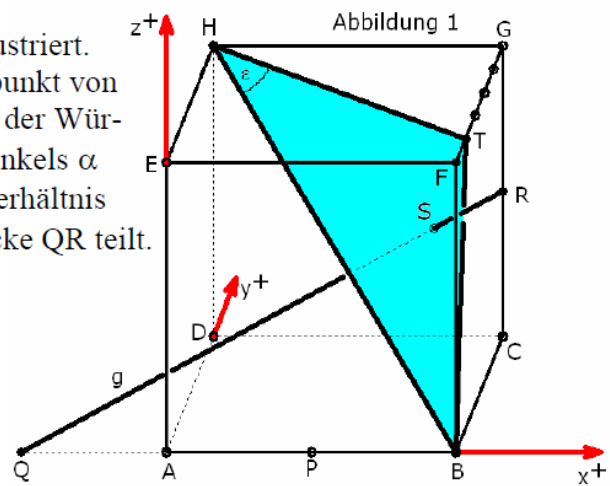
- Stelle eine Gleichung der Ebene ε_{CQR} auf!
- Ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts $\{S\} = g_{UV} \cap \varepsilon_{CQR}$!
- In welchem Verhältnis teilt V die Strecke SU (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Begründe, warum $g_{UV} \perp \varepsilon_{CQR}$ gilt!
- Zeige, dass S auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle CQR$ ist!

72) In Abbildung 1 ist ABCDEFGH ein Würfel der Seitenlänge 12. J, M, Q und W sind Kantenmittelpunkte, I und L (und auch V) sind Flächenmittelpunkte. K ist der Spiegelpunkt von I an J, N der Spiegelpunkt von L an M, R der Spiegelpunkt von Q an C, U der Mittelpunkt der Strecke AN. Schließlich entsteht T durch fortlaufende Spiegelung von V an W.

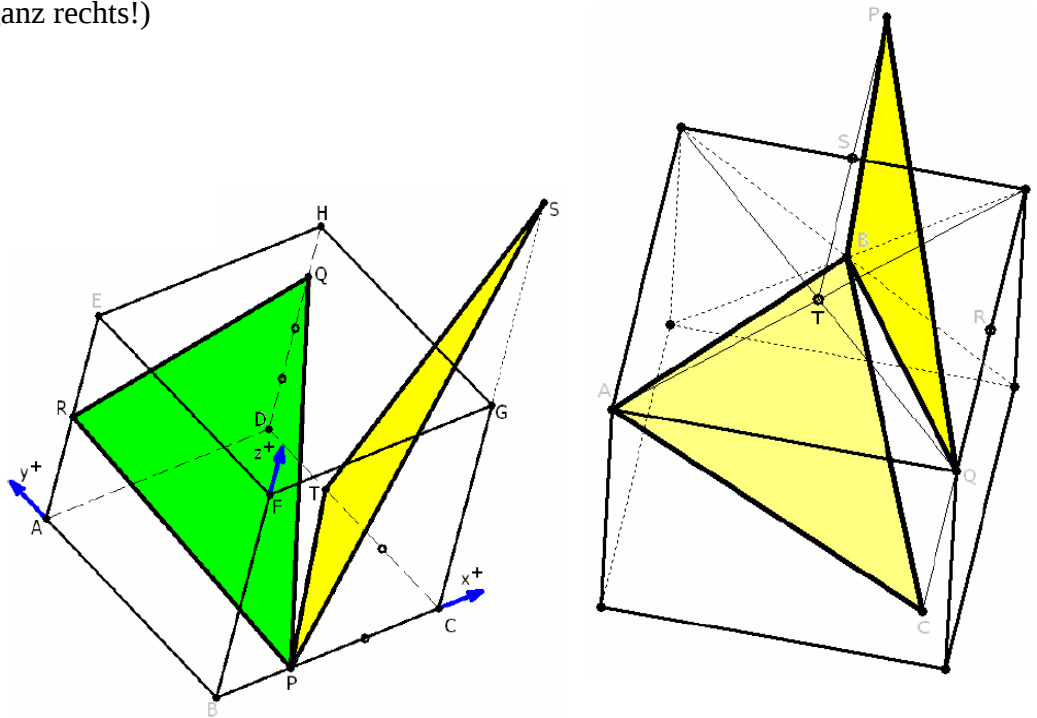
Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels $\alpha = \angle(g, \varepsilon)$ und außerdem die Lage von $\{S\} = g \cap \varepsilon$ relativ zu KU. Verifiziere ferner, dass S auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle PRT$ ist!



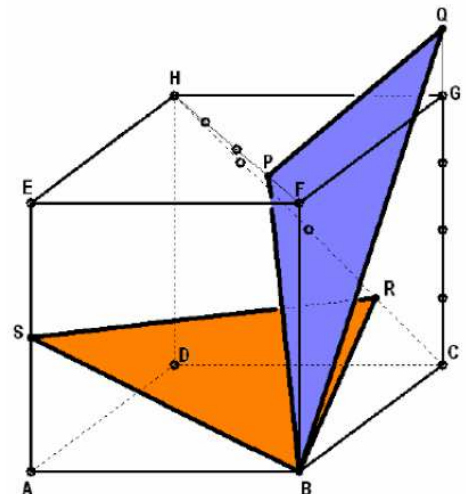
- 73) In Abbildung 1 ist ein Würfel der Seitenlänge 70 illustriert. P und R sind Kantenmittelpunkte, Q ist der Spiegelpunkt von P an der Würfelfecke A. T entsteht durch Fünftelung der Würfelfkante FG. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels α zwischen g und ε und ermittle ferner, in welchem Verhältnis der Durchstoßpunkt $\{S\} = g \cap \varepsilon$ die Länge der Strecke QR teilt.



- 74) In nebenstehender Figur (ganz rechts!) ist ein Würfel der Seitenlänge 2 abgebildet. R und S sind Kantenmittelpunkte, B und T sind Flächenmittelpunkte. C bzw. P ist der Spiegelpunkt von R an Q bzw. von T an S. Zeige, dass die Ebenen ε_{ABC} und ε_{BPQ} aufeinander normal stehen.



- 75) Im rechts abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Kantenlänge 4) entstehen die Punkte P, Q und R durch (im Fall von Q: fortlaufende) Viertelung von FH, CG und CH, S ist der Mittelpunkt der Kante AE. Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen den Ebenen ε_{BPQ} und ε_{BRS} !



76) **Aus einer Wiederholungsprüfung:**

In der rechten unteren Abbildung siehst du (oberhalb von 75)!) einen Würfel der Seitenlänge 12, aus dem sich zwei Dreiecke ΔPQR und ΔPST ableiten:

- ✓ P entsteht durch Drittelung der Kante BC.
- ✓ Q geht durch Viertelung der Kante DH hervor.
- ✓ R ist der Mittelpunkt der Kante AE.
- ✓ S ergibt sich durch Spiegelung von C an G.
- ✓ Schließlich ist T das Resultat einer Drittelung der Kante CD.

Zeige, dass die Trägerebenen der beiden Dreiecke aufeinander normal stehen!
(Ein Vorschlag für ein Koordinatensystem ist bereits eingezeichnet. ☺)

- 77) Der Würfel aus der rechten unteren Abbildung (auf der nächsten Seite!) weist eine Seitenlänge von 20 auf. P bzw. R entsteht durch Viertelung bzw. Fünftelung der Kante CG bzw. EF. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen den Ebenen ε_1 und ε_2 !

78) Aus einer mündlichen Prüfung vom Jänner 2011:

Im Würfel $ABCDEFGH$ (Kantenlänge 2) sei P der Mittelpunkt der Kante AB sowie Q der Spiegelpunkt der Würfecke A am Eckpunkt E . ε_1 bzw. ε_2 bezeichne die Ebene durch die Punkte P, H und Q bzw. durch die Punkte P, H und C (siehe Abbildung 4). Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels $\beta = \angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$!

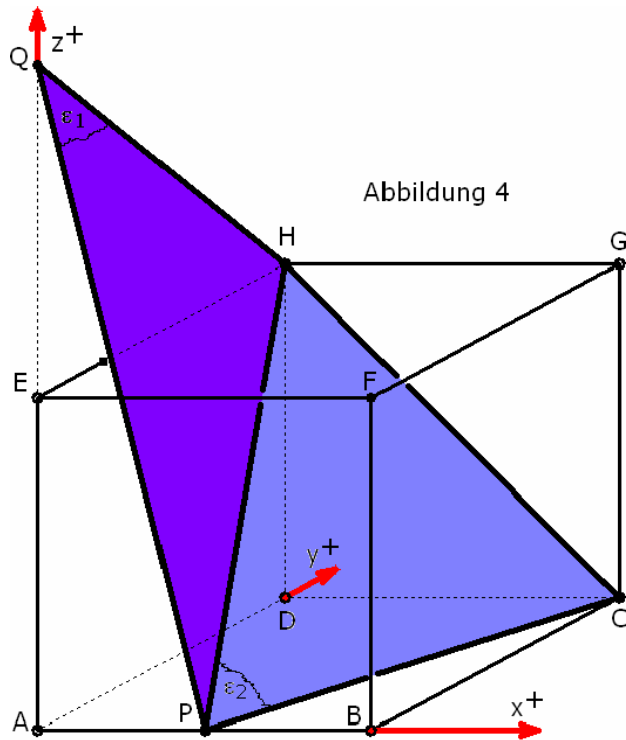


Abbildung 4

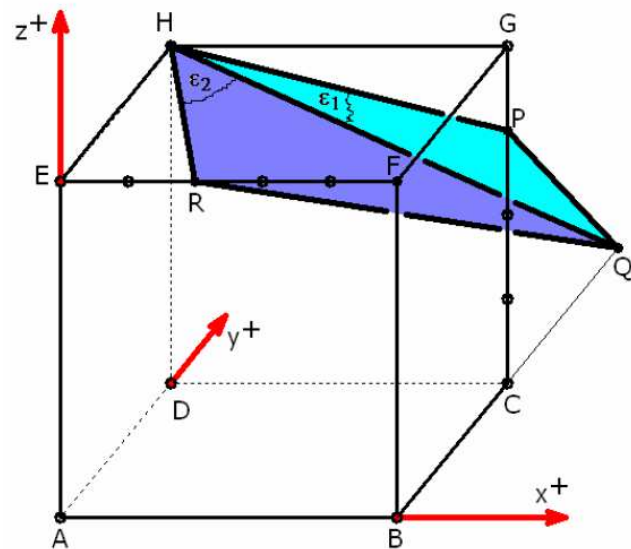


Abbildung 2

79) Im Würfel $ABCDEFGH$ (Kantenlänge 2) haben die Punkte P, Q und R aus Abbildung 2 die folgenden Bedeutungen:

- P und Q sind Kantenmittelpunkte.
- R ist der Spiegelpunkt der Würfecke F am Würfeckpunkt G .

Ermittle das Maß des *spitzen* Schnittwinkels $\psi = \angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$!

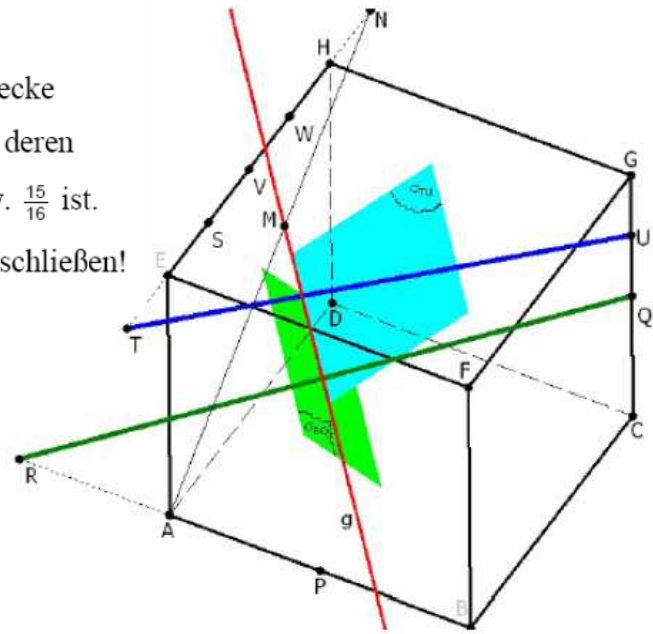
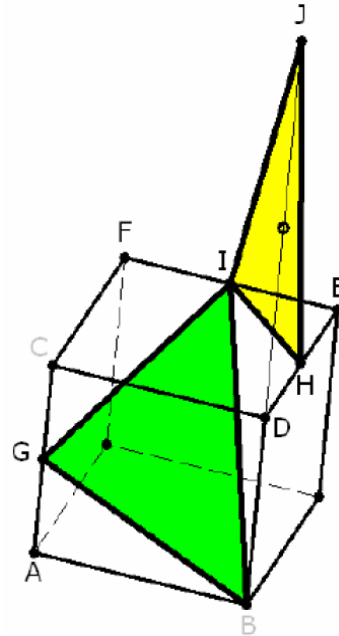
80) Im Würfel $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 28 entstehen bis auf M alle abgebildeten Punkte durch (fortlaufende) Kantenhalbierung sowie Spiegelung, lediglich M geht durch Unterteilung der Strecke AN in sieben gleich lange Teile hervor, wobei M von A aus betrachtet der vierte Teilungspunkt ist. (Abbildung auf der nächsten Seite!)

- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen σ_{RQ} und σ_{TU} .
- Zeige, dass die Schnittgerade g von σ_{RQ} und σ_{TU} zu einer Raumdiagonale des Würfels parallel verläuft (Zu welcher? Begründe!).
- Zeige, dass M auf g liegt.

81) Der abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 2 auf.

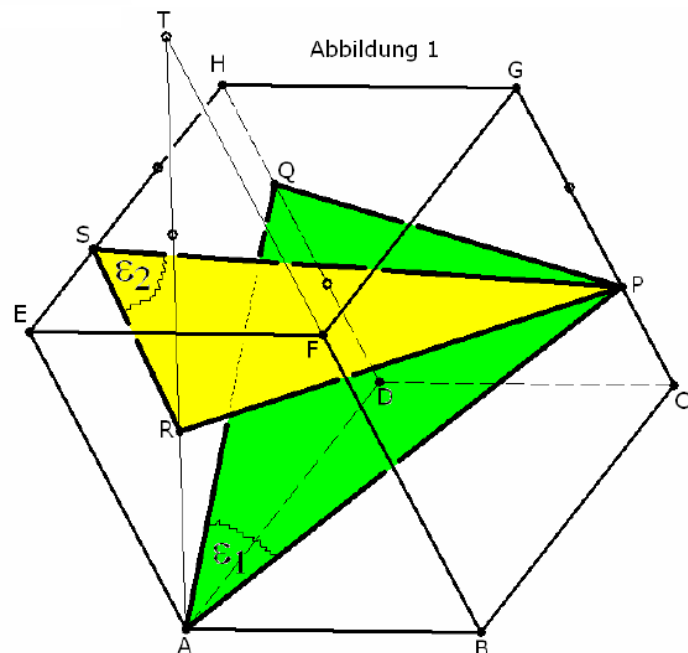
Die Punkte G, H und I sind Kantenmittelpunkte, J entsteht durch fortlaufende Spiegelung von B an D.

- (1) Berechne die Flächeninhalte der beiden abgebildeten Dreiecke (Wurzelausdrücke!) und zeige ohne Taschenrechner, dass deren Verhältnis nur geringfügig größer bzw. kleiner als $\frac{16}{15}$ bzw. $\frac{15}{16}$ ist.
- (2) Zeige, dass die beiden Dreiecke einen rechten Winkel einschließen!



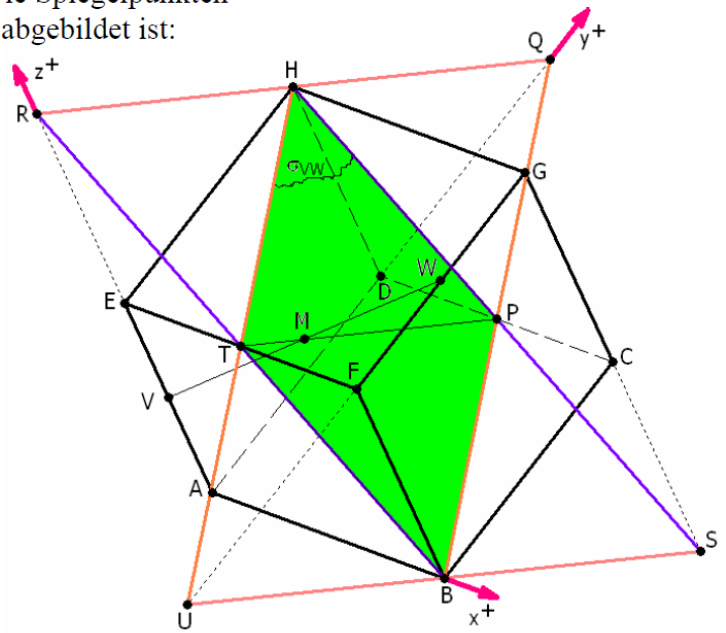
82) Die Kantenlänge des Würfels in Abbildung 1 beträgt 6. Die Punkte P, Q und S entstehen wie aus der Abbildung ersichtlich durch Kantendrittungen, T ist der Spiegelpunkt der Würfecke B an der Würfecke F. Schließlich entsteht R durch Drittelung der Strecke AT.

- a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem, zeichne es in Abbildung 1 sauber an und koordinatisiere zunächst die oben genannten Punkte!
- b) Ermittle ohne Taschenrechner das Maß des von den Ebenen ε_1 und ε_2 eingeschlossenen spitzen Schnittwinkels φ !
- c) Zeige ebenfalls ohne Taschenrechner, dass der Quotient der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle RPS$ und $\triangle APQ$ gleich dem Tangens von φ ist!
- d) Begründe, warum die Schnittgerade von ε_1 und ε_2 zur Gerade g_{RS} parallel verläuft!

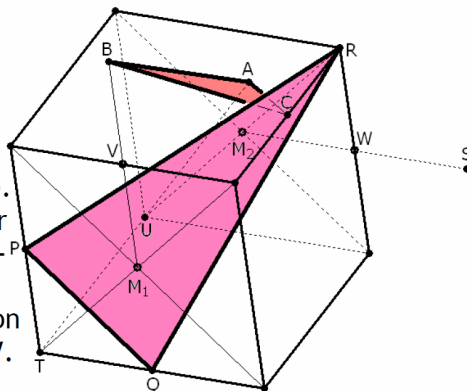


83) Betrachte die rechte Figur, in der ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 4 zusammen mit Kantenmittelpunkten sowie Spiegelpunkten von Würfecken an anderen Würfeckpunkten abgebildet ist:

- Stelle eine Gleichung der Symmetrieebene σ_{VW} auf, ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und T von σ_{VW} mit den Würfelkanten CD und EF und zeige, dass sowohl die Würfeckpunkte B und H in σ_{VW} zu liegen kommen als auch P und T Kantenmittelpunkte sind.
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte Q, R, S und U von σ_{VW} mit den Trägergeraden der verbleibenden Würfelkanten und zeige, dass es sich jeweils um Spiegelpunkte von Würfecken an anderen Würfeckpunkten handelt.
- Zeige, dass g_{VW} und σ_{VW} einander in einem Punkt von g_{PT} schneiden. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt M die Länge der Strecke PT?
- Zeige, dass es sich bei dem Viereck TBPH um eine Raute handelt und berechne ihren Flächeninhalt auf zwei Arten!
- Begründe ausführlich, warum der Flächeninhalt der gesamten Schnittsechsecks dreimal so groß ist als der in Aufgabenteil d) berechnete Flächeninhalt!

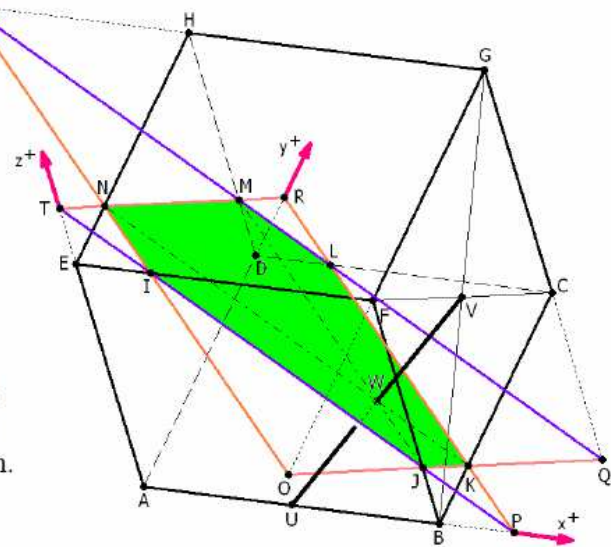


84) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 2 abgebildet. C, P, Q, V und W sind Kantenmittelpunkte, M_1 und M_2 sind Flächenmittelpunkte. A ist der Spiegelpunkt der Würfecke T an der Würfecke U, B bzw. S entsteht durch Spiegelung von M_1 an V bzw. von M_2 an W.



- Ermittle ohne Taschenrechner das Maß eines Schnittwinkels zwischen den Ebenen ϵ_{ABC} und ϵ_{PQR} !
- Zeige, dass S auf der Schnittgeraden der Ebenen ϵ_{ABC} und ϵ_{PQR} liegt!

85) Betrachte die rechte Figur, in der ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 8 zusammen mit dem Kantenmittelpunkt U sowie dem Flächenmittelpunkt V abgebildet ist:



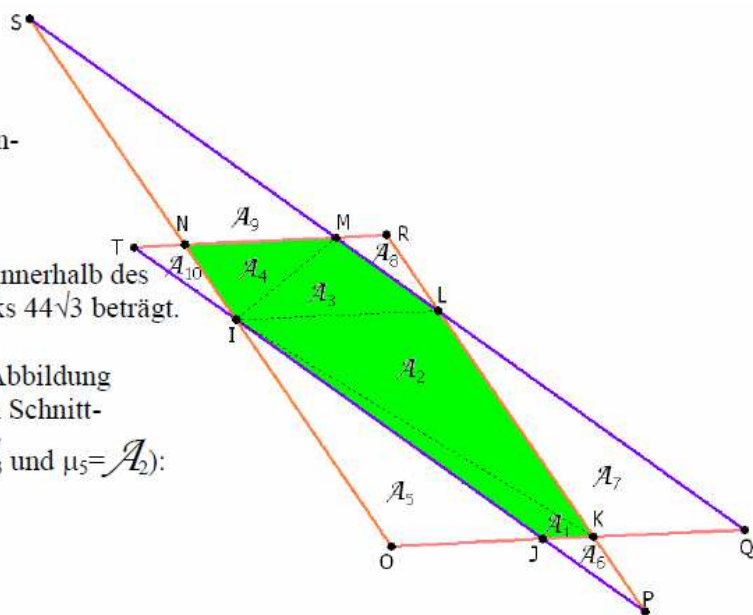
- Stelle eine Gleichung der Symmetrieebene σ_{UV} auf, ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte I, J, K, L, M und N von σ_{UV} mit den Würfelkanten EF, BF, BC, CD, DH und EH und EF und zeige, dass alle sechs Punkte durch Kantenviertelung entstehen.
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte O, P, Q, R, S und T von σ_{UV} mit den Trägergeraden der verbleibenden Würfelkanten und zeige, dass es sich jeweils um Punkte handelt, die aus fortlaufender Kantenviertelung hervorgehen.

- Zeige, dass der Schnittpunkt $\{W\} = g_{UV} \cap \sigma_{UV}$ auch auf g_{JM} und g_{KN} liegt! In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt W die Länge beider Strecken JK und NM? Begründe elementargeometrisch, warum zweimal das gleiche Verhältnis vorliegt!

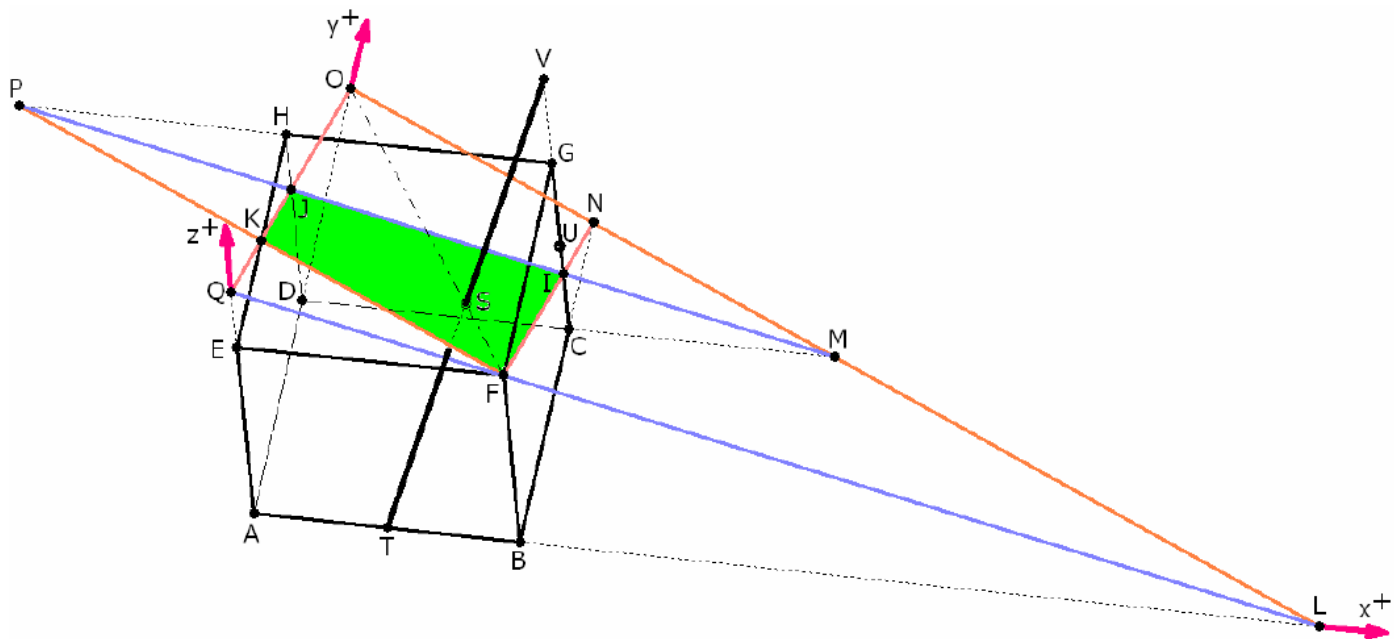
- Zeige, dass der Flächeninhalt des innerhalb des Würfels liegenden Schnittsechsecks $44\sqrt{3}$ beträgt.

- Bezüglich der in nebenstehender Abbildung getroffenen Partition der gesamten Schnittfläche ist zu zeigen (wobei $\mu_3 = \mathcal{A}_3$ und $\mu_5 = \mathcal{A}_2$):

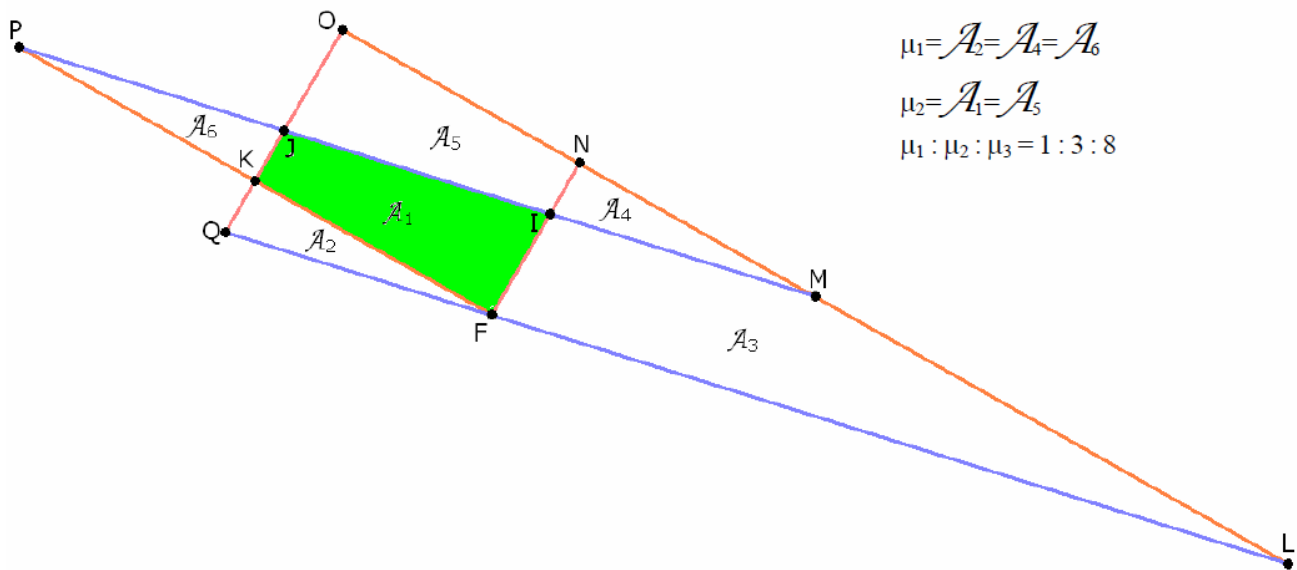
- $\mu_1 = \mathcal{A}_6 = \mathcal{A}_8 = \mathcal{A}_{10}$
- $\mu_2 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_4$
- $\mu_4 = \mathcal{A}_5 = \mathcal{A}_7 = \mathcal{A}_9$
- $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 : \mu_5 = 1 : 3 : 4 : 9 : 12$



86) Betrachte die untere Figur, in der ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 12 zusammen mit den Kantenmittelpunkten T und U sowie dem Spiegelpunkt V von U am Würfeckpunkt G abgebildet ist:



- Stelle eine Gleichung der Symmetrieebene σ_{TV} auf und ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte I, J und K von σ_{TV} mit den Würfelkanten CG, DH und EH. Zeige, dass I und J durch Kantendrittung entstehen, K ein Kantenmittelpunkt ist und dass auch F in σ_{TV} liegt.
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte L, M, N, O, P und Q von σ_{UV} mit den Trägergeraden der verbleibenden Würfelkanten! Zeige, dass L, O und P durch fortlaufende Spiegelungen von Würfecken an anderen Würfeckpunkten sowie M und N bzw. Q durch fortlaufende Kantenhalbierung bzw. Kantendrittung entstehen.
- Zeige, dass der Schnittpunkt $\{S\} = g_{TV} \cap \sigma_{TV}$ auch auf g_{FQ} liegt! In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S die Länge der Strecke FQ?
- Zeige, dass der Flächeninhalt des innerhalb des Würfels liegenden Schnittvierecks $36\sqrt{13}$ beträgt und es sich dabei um ein Trapez handelt!
- Bezüglich der in der unteren Abbildung getroffenen Partition der gesamten Schnittfläche ist zu zeigen (wobei $\mu_3 = \mathcal{A}_3$):



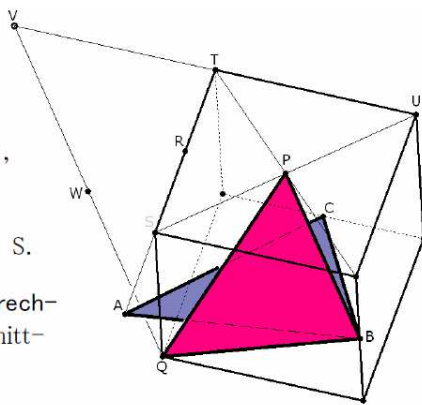
$$\mu_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_6$$

$$\mu_2 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_5$$

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 1 : 3 : 8$$

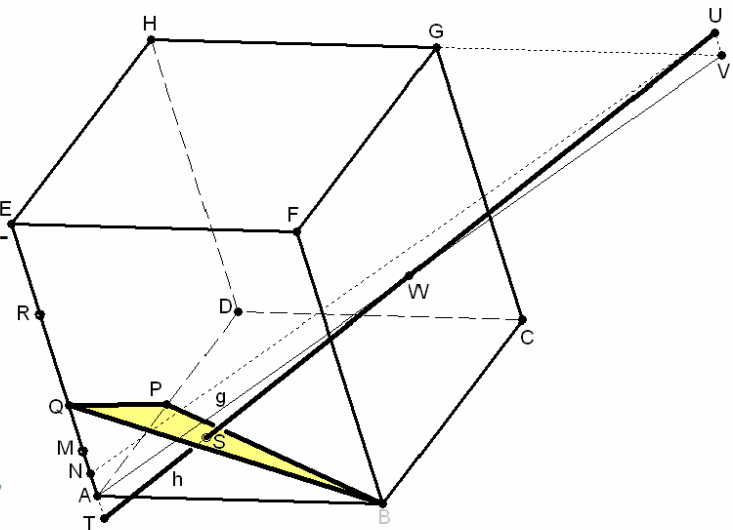
87) In nebenstehender

Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 2 abgebildet. B, C und R sind Kantenmittelpunkte, P ist ein Flächenmittelpunkt. A ist der Spiegelpunkt von R an der Würfecke S.



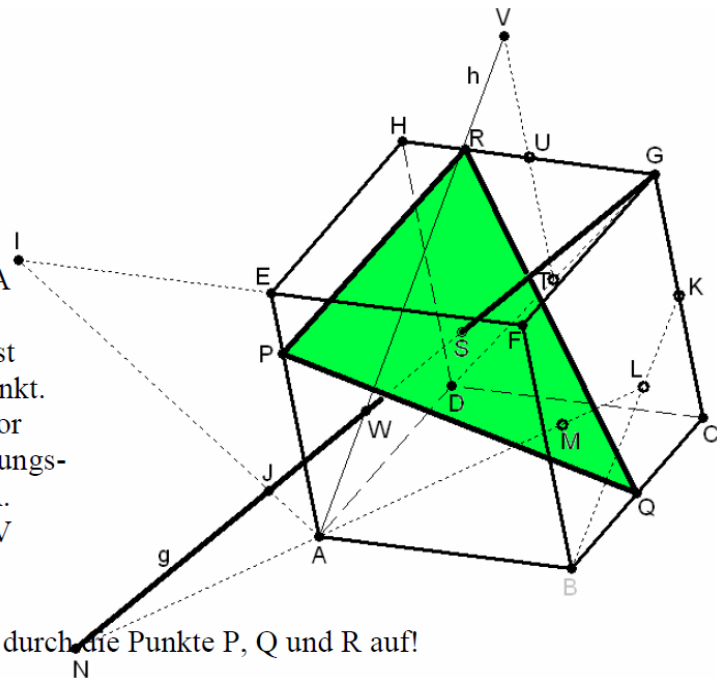
- Ermittle ohne Taschenrechner das Maß eines Schnittwinkels zwischen den Ebenen ε_{ABC} und ε_{BPQ} .
- V ist der Spiegelpunkt der Würfecke U an der Würfecke T, W ist der Mittelpunkt der Strecke QV. Zeige, dass die Schnittgerade der Ebenen ε_{ABC} und ε_{BPQ} (nebst B auch) durch W geht.
- Nimm ausführlich zur Behauptung Stellung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BPQ$ sich wie 185:117 verhalten!

88) Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 36 auf, P ist ein Kantenmittelpunkt, Q und R entstehen durch Kantendrittung. M ist der Mittelpunkt der Strecke AQ, N jener von AM. T ist der Spiegelpunkt von N an A, V jener von H an G. Schließlich ist U der vierte Eckpunkt des Parallelogramms AVUN.



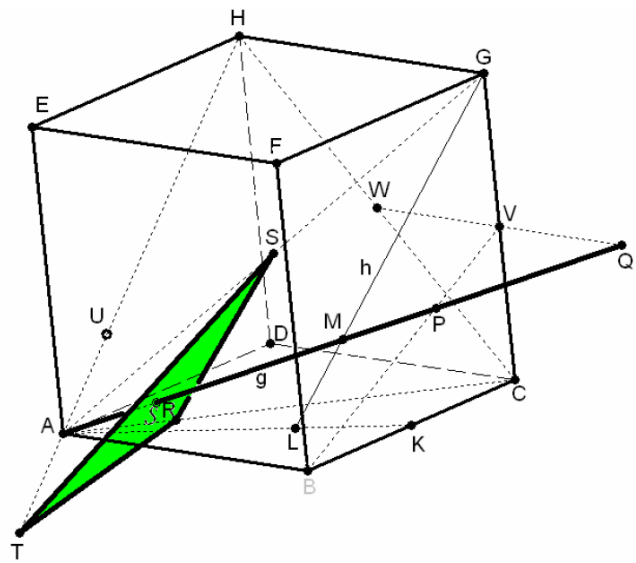
- Stelle eine Gleichung der Ebene ε durch die Punkte B, P und Q auf!
- Ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts $\{S\} = g \cap \varepsilon$ und zeige, dass es sich bei S um den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle BPQ$ handelt!
- Zeige, dass die Geraden g und h einander schneiden und beschreibe die Lage des Schnittpunkts $\{W\} = g \cap h$ relativ zum Würfel!
- Projiziere U (oder V) normal in die Ebene $\varepsilon_{ABC(D)}$, du erhältst K. Dann teile die Strecke AK in vierzehn Teile. L bezeichne von A aus gesehen den ersten Teilungspunkt. Zeige, dass L auf h liegt!

89) Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 24 auf, Q, K und U sind Kantenmittelpunkte, P und R entstehen durch Kantenviertelung, wobei P bzw. R von E bzw. H aus betrachtet jeweils der erste Teilungspunkt ist. I ist der Spiegelpunkt von F an E, J geht aus einer Sechstelung von AI hervor, wobei J von A aus betrachtet der erste Teilungspunkt ist. L entsteht durch Drittelung von BK und ist von K aus betrachtet der erste Teilungspunkt. M geht aus einer Viertelung von AL hervor und ist von L aus betrachtet der erste Teilungspunkt, N ist der Spiegelpunkt von M an A. T ist der Mittelpunkt der Diagonale DG, V sein Spiegelpunkt an U.



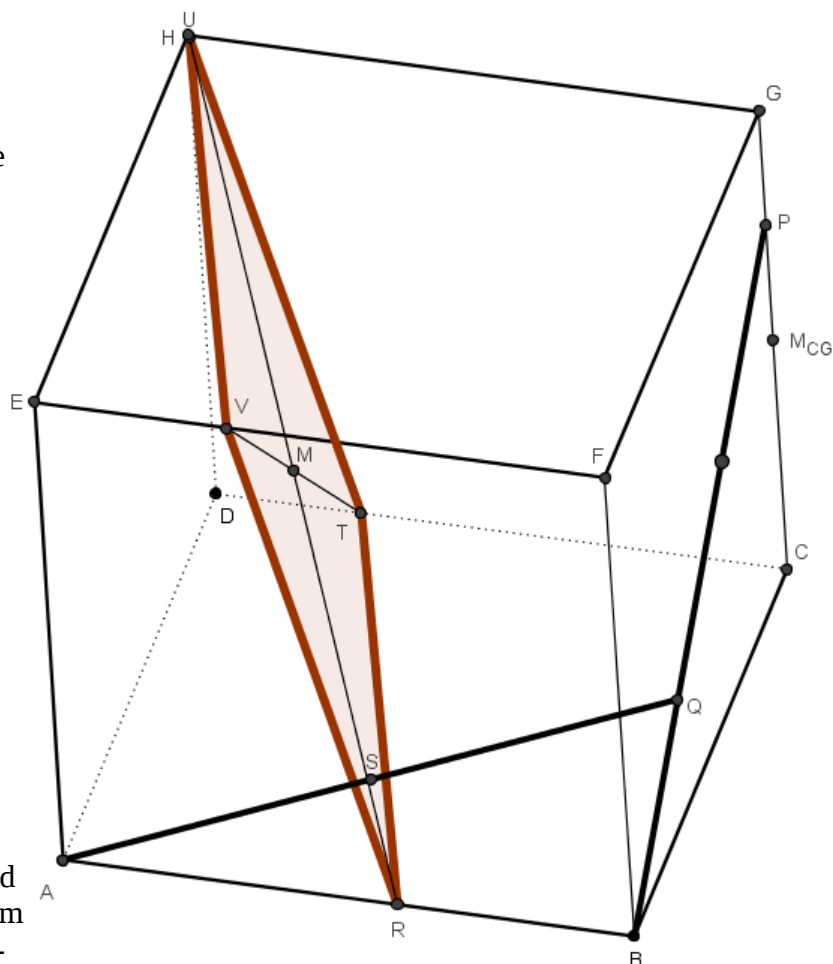
- Stelle eine Gleichung der Ebene ε durch die Punkte P, Q und R auf!
- g sei die Gerade durch G und J. Ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts $\{S\}=g \cap \varepsilon$ und zeige, dass es sich bei S um den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle PQR$ handelt! In welchem Verhältnis teilt er die Strecke GJ?
- Zeige, dass die Geraden g und h einander schneiden und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts $\{W\}=g \cap h$!
- Zeige, dass auch N auf g liegt!
- Liegt R auf h (wie man anhand der gewählten Perspektive vermuten könnte)?

90) Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 12 auf, K und V sind Kantenmittelpunkte, S bzw. W ist ein Flächen(diagonalen)mittelpunkt. R und U entstehen durch Viertelung entsprechender Flächendiagonalen, T bzw. Q geht aus Spiegelung von U an A bzw. von W an V hervor. L bzw. P schließlich ist das Resultat einer Streckendrittelung (von AK bzw. von BV).



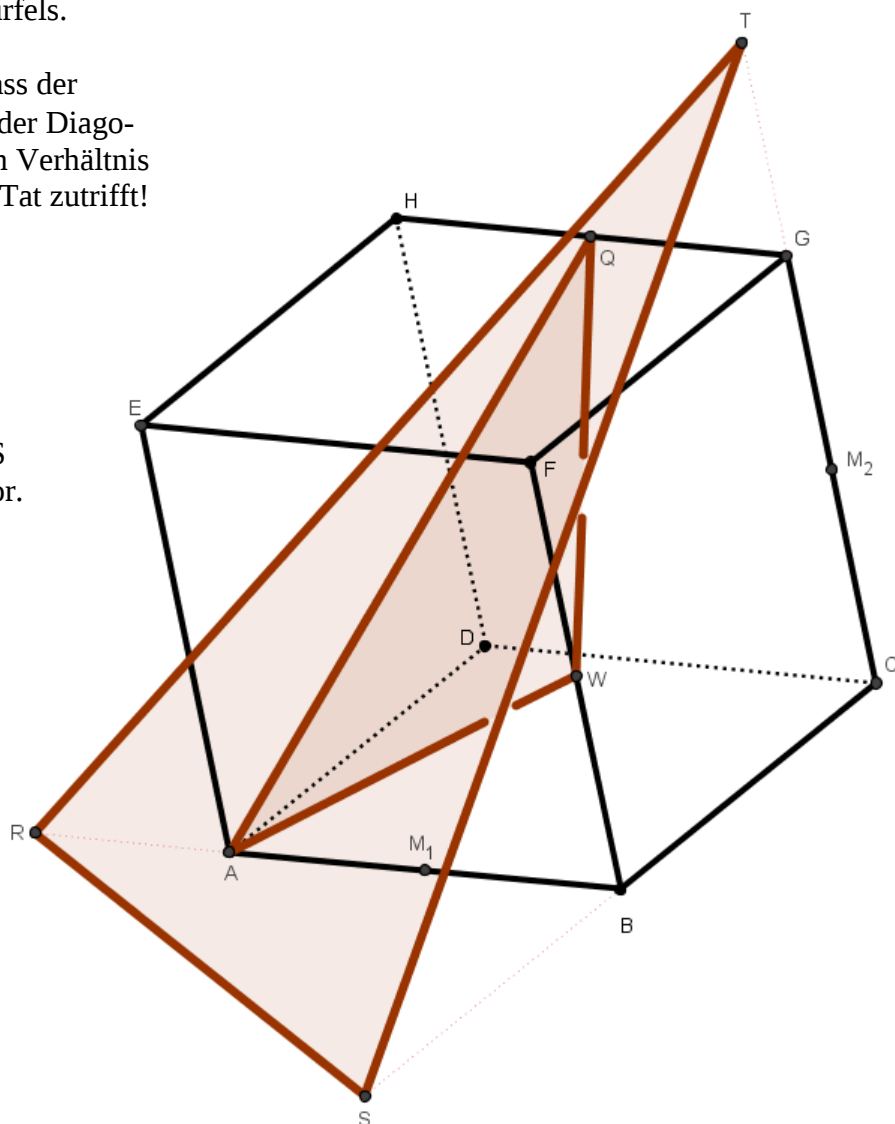
- Stelle eine Gleichung der Ebene ε durch die Punkte R, S und T auf!
- g sei die Gerade durch A und Q. Ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts $\{S\}=g \cap \varepsilon$ und zeige, dass es sich bei S um den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle RST$ handelt! In welchem Verhältnis teilt er die Strecke AQ?
- Zeige, dass die Geraden g und h einander schneiden und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts $\{M\}=g \cap h$! In welchem Verhältnis teilt er die Strecke AQ?
- Zeige, dass auch P auf g liegt!

91) Der Würfel in der rechten Abbildung weist eine Seitenlänge von 288 auf. M_{EG} ist der Mittelpunkt der Würfelkante CG , P ist der Mittelpunkt der Strecke $M_{CG}G$. Der Punkt Q entsteht durch Drittelung der Strecke BP . Die Symmetrieebene σ_{AQ} schneidet (wie sich zeigen lässt) nur die Würfelkanten AB , CD , GH und EF , und zwar in den Punkten R , T , U und V .



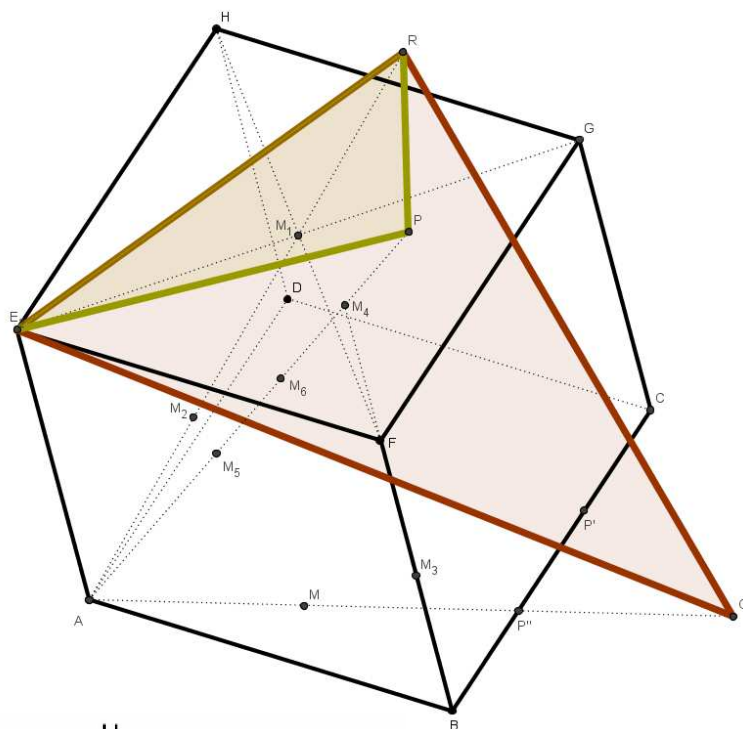
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte R , T , U und V und begründe ohne Taschenrechner, dass es sich beim Viereck $RTUV$ um ein Parallelogramm, aber keine Raute handelt.
- Gloria und Omar (Remember: Genie-DG-Gruppe) meinen, dass es sich aber „fast“ um eine Raute handelt und behaupten, dass die Winkel zwischen den Diagonalen nur um knapp $1^\circ 17' 7''$ von einem rechten Winkel abweichen. Überprüfe diese Behauptung deiner/s Schulkolleg/innen!
- Berechne den Flächeninhalt der Raute und zeige ohne Taschenrechner, dass dieser um ein Zwölftel größer ist als jener jedes einzelnen Begrenzungsquadrats des Würfels.
- Die Genie-DG-Gruppe behauptet, dass der Schnittpunkt S von g_{AQ} mit σ_{AQ} auf der Diagonale RU liegt und die Strecke RM im Verhältnis 1:2 teilt. Kontrolliere, ob dies in der Tat zutrifft!

92) Der Würfel in der rechten Abbildung weist eine Seitenlänge von 2 auf. W , Q , M_1 und M_2 sind Kantenmittelpunkte. R bzw. T entsteht durch Spiegelung von M_1 an A bzw. von M_2 an G . Der Punkt S geht durch Spiegelung von C an B hervor.

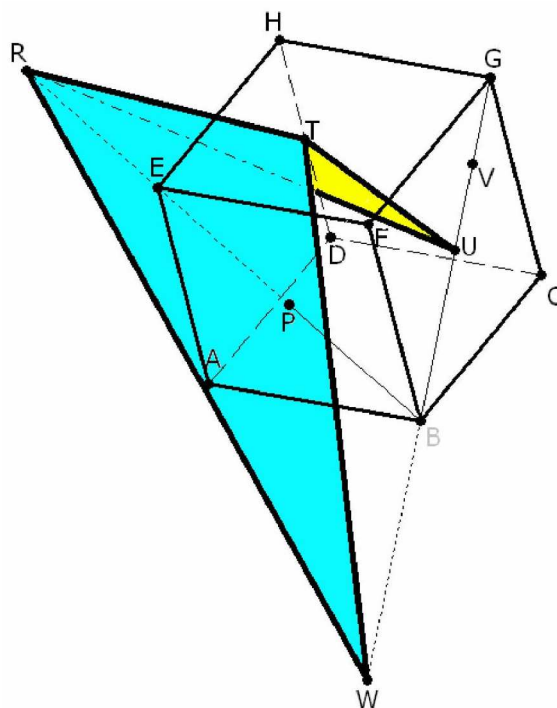


- Stelle Gleichungen der Ebenen ϵ_{AWQ} und ϵ_{RST} auf und zeige, dass sie zueinander parallel verlaufen.
- Setze die Flächeninhalt der Dreiecke $\triangle AAWQ$ und $\triangle RST$ in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!

- 93) Der Würfel in der rechten Abbildung eine Seitenlänge von 24 auf. Die Punkte P' und P'' entstehen durch Kantendrittung. M ist der Mittelpunkt der Strecke AP'' , Q dessen Spiegelpunkt an P'' . M_1 ist ein Flächenmittelpunkt, M_2 der Mittelpunkt der Strecke AM_1 , R dessen Spiegelpunkt an M_1 . Schließlich ist M_3 der Mittelpunkt der Würfelkante BF , M_4 dessen Spiegelpunkt an F , M_5 der Mittelpunkt der Strecke AM_4 , M_6 der Mittelpunkt der Strecke M_4M_5 und schlussendlich P der Spiegelpunkt von M_6 an M_4 . Zeige, dass die Ebenen ϵ_{EQR} und ϵ_{EPR} aufeinander normal stehen!



- 94) Der rechts abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 4. T ist ein Kantenmittelpunkt, P und U sind Flächen(diagonalen)mittelpunkte. V ist der Mittelpunkt der Strecke UG , W bzw. R entsteht durch Spiegelung von V an B bzw. von P an E . Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ der Ebenen ϵ_{RTW} und ϵ_{RTU} , zeige, dass der Winkel $\sphericalangle WTU$ auch den Schnittwinkel φ liefert und begründe ausführlich anhand der Diskussion des Terminus technicus „Winkel zwischen zwei Ebenen“, warum dies so ist!



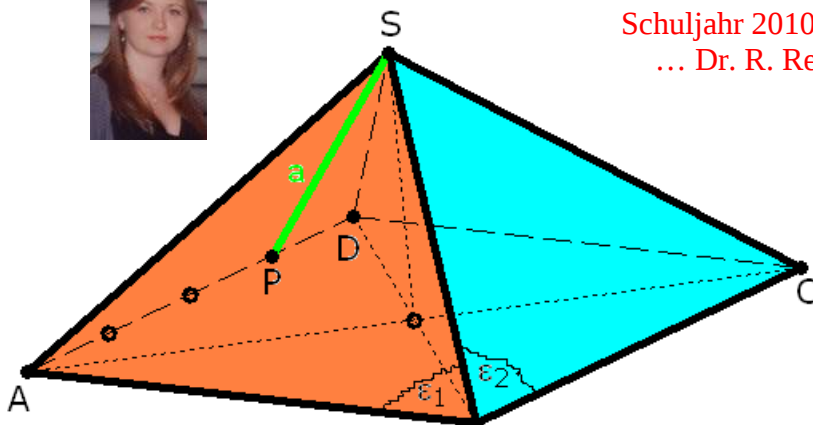
Zwei legendäre Übungsaufgaben aus einer meiner ehemaligen sechsten Klassen:

Klasse: 6A(G)
Mathematik bei ...



Schuljahr 2010/11
... Dr. R. Resel

BREITSche Pyramiden (nach A. BREIT, *1995, siehe Abbildung oben!©) sind gerade quadratische Pyramiden, die halb so hoch als breit sind. Da über diesen speziellen Pyramidentyp praktisch noch keine tieferliegenden Forschungsergebnisse existieren (was womöglich daran liegen mag, dass „B-Pyramiden“ bislang kaum bis überhaupt keine Aufmerksamkeit seitens der Geometer dieser Welt erfahren©), soll jz die liebe 6A Eigenschaften von „B-Pyramiden“ herleiten



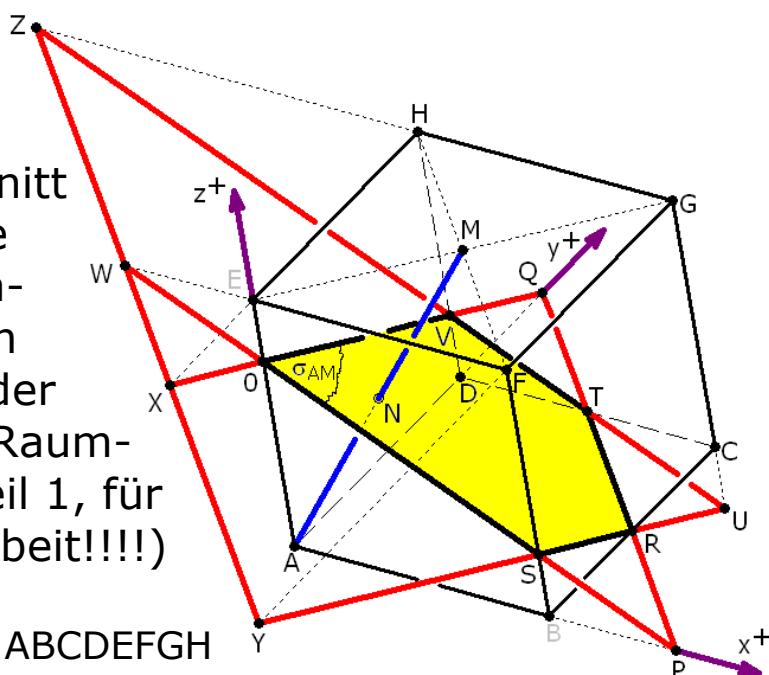
- 95) Berechne das Maß des stumpfen Schnittwinkels $\varphi = \sphericalangle(\epsilon_1, \epsilon_2)$, welcher auch dem Winkel zwischen den Trägerdreiecken der beiden Ebenen entspricht.

- 96) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels $\psi = \sphericalangle(a, \epsilon_1)$, wobei der auf a (nna'sche Gerade) liegende Punkt P durch Viertelung der Basiskante AD entsteht.

Klasse: 6A(G)
Mathematik bei ...

Schuljahr 2010/11
... Dr. Robert RESEL

"MAMMUT"-
 Aufgabenstellung zum Schnitt
 Gerade/Ebene
 sowie zum Flächeninhalt von
 Dreiecken in der
 Analytischen Raum-
 geometrie (Teil 1, für
 die 1. Schularbeit!!!!)



In der Abbildung wird der Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 4) mit der Symmetrieebene σ_{AM} der Strecke AM (i.e. jene Ebene, welche auf AM normal steht und durch den Mittelpunkt N der Strecke AM hindurchgeht) zum Schnitt gebracht, woraus das innerhalb des Würfels liegende Fünfeck OSRTV hervorgeht, welches außerhalb des Würfels noch durch weitere Drei- und Vierecke ergänzt wird.

- Stelle unter Verwendung des **bereits eingezeichneten Koordinatensystems** eine Gleichung von σ_{AM} auf und berechne die Koordinaten der zwölf Schnittpunkte O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y und Z von σ_{AM} mit den Trägergeraden aller(!) Würfelkanten!
- Berechne den Flächeninhalt des vom **Streckenzug ZYSPRUTQVZ** umrandeten Gebiets!
- Begründe ohne Taschenrechner, warum das Fünfeck OSRTV **mehr als $\frac{1}{4}$** des in b) berechneten Flächeninhalts einnimmt. Beträgt **diese Differenz** mehr oder weniger als 1% des in b) berechnete Flächeninhalts? Begründe auch diesmal ohne Taschenrechner!!

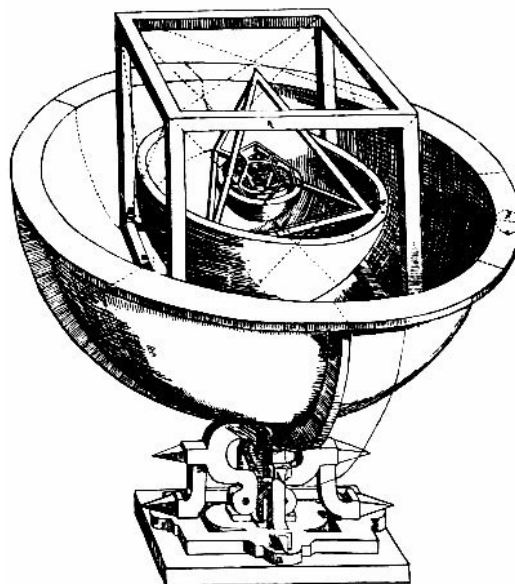
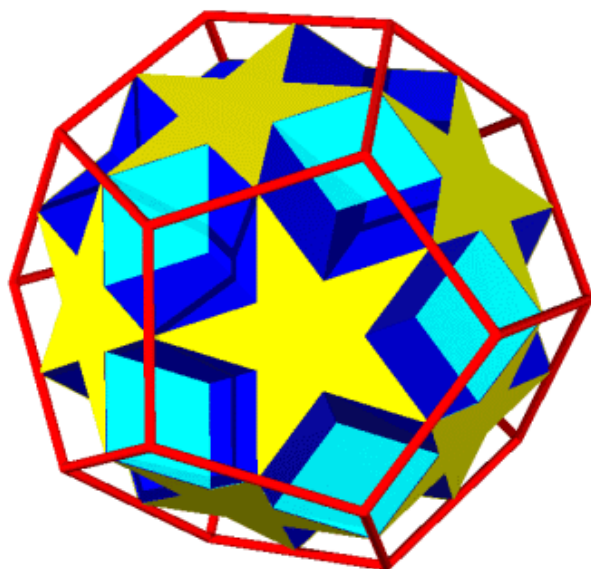
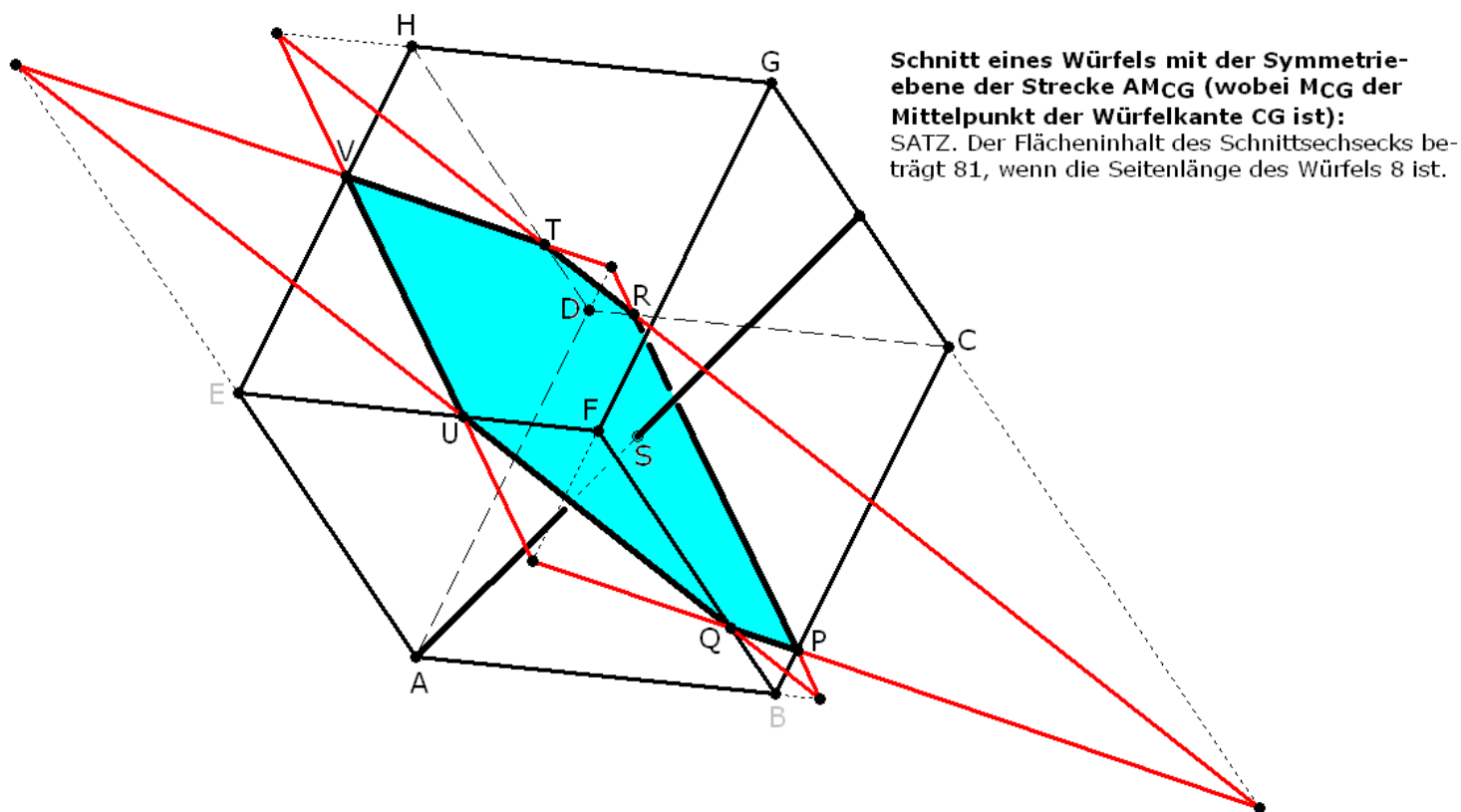
- Lösungen:
- $\sigma_{AM}: x + y + 2z = 6$, O(0/0/3), P(6/0/0), Q(0/6/0), R(4/2/0), S(4/0/1), T(2/4/0), U(4/4/-1), V(0/4/1), W(-2/0/4), X(0/-2/4), Y(4/-6/4), Z(-6/4/4)
 - $27\sqrt{6}$ (Tipp: Es reicht eine Unterteilung in drei Dreiecke, deren Flächeninhalte – Kontrollmöglichkeit! – sich wie 25:1:1 verhalten!)
 - $7\sqrt{6} : 27\sqrt{6} = \dots$, Rest selbst (2. Klasse Bruch- und Prozentrechnung!), **Differenz** kleiner als 1%, weil...(auch selbst, siehe letzte Klammerbemerkung)

98) Und noch etwas aus einer ehemaligen sechsten Klasse:

Klasse: 6A(G mit F3)
Mathematik bei

Schuljahr: 2010/11
..... Dr. R. Resel

... und noch eine Übung zum Schnitt von Gerade und Ebene sowie der Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken: ☺



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!