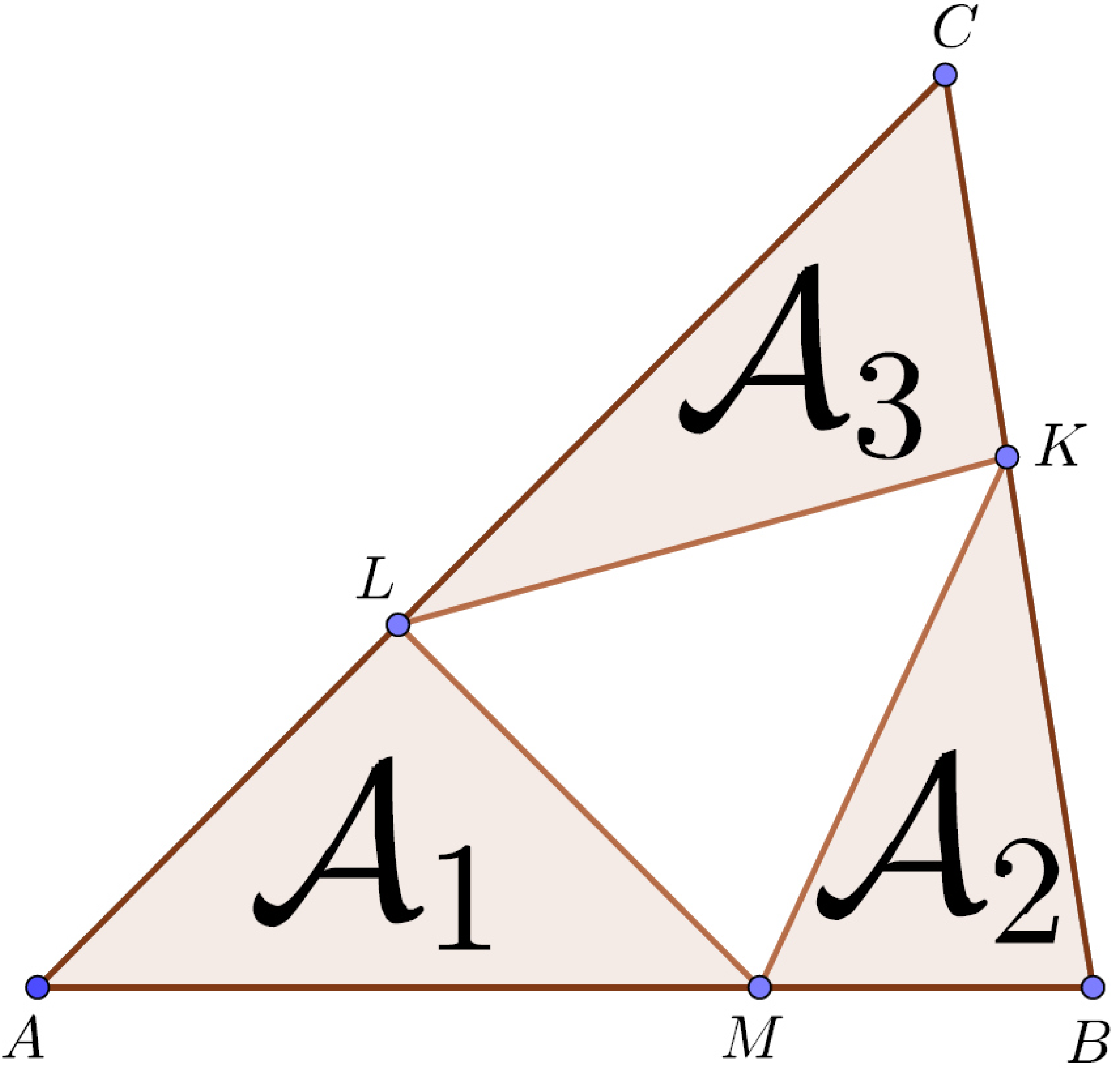
GEOMETRIE



Mindestens eines der drei gefärbten Teildreiecke hat einen Flächeninhalt, der höchstens ¼-mal so groß ist als der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur GEOMETRIE (Aufgaben 1 bis 7)

1) Aus dem Landeswettbewerb für Anfänger (in weiterer Folge mit LWA abgekürzt) 2007:
   (Stephan Wagner) Wir betrachten ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$ liegt.

   Man zeige, dass $\sphericalangle AMB$ ein rechter Winkel ist.

2) Aus dem LWA 2009:
   (Walther Janous) Der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$ wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet.

   Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

3) Aus dem LWA 2012:
   (Gerhard Kirchner) Gegeben sei eine Strecke AB. Wir errichten über und unter AB die gleichseitigen Dreiecke ABC bzw. ADB. Wir bezeichnen die Mittelpunkte von AC und BC mit E bzw. F.

   Man zeige, dass die Geraden DE und DF die Strecke AB in drei gleich lange Teile zerlegen.

4) Aus dem LWA 2014:
   (Karl Czakler) Es sei ABC ein Dreieck. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB werden mit D, E bzw. F bezeichnet. Die beiden Schwerlinien AD und BE sollen aufeinander normal stehen und die Längen $\overline{AD} = 18$ und $\overline{BE} = 13{,}5$ haben.

   Man berechne die Länge der dritten Schwerlinie CF dieses Dreiecks.

5) Aus dem LWA 2015:
   (Robert Geretschläger) Der Kreis k_2 berührt den Kreis k_1 von innen im Punkt X. Der Punkt P liegt auf keiner der beiden Kreislinien und nicht auf der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte. Der Punkt N_1 ist jener Punkt auf k_1, der P am nächsten liegt, und F_1 ist jener Punkt auf k_1, der von P am weitesten entfernt ist. Analog ist der Punkt N_2 jener Punkt auf k_2, der P am nächsten liegt, und F_2 ist jener Punkt auf k_2, der von P am weitesten entfernt ist.

   Man beweise, dass $\sphericalangle N_1XN_2 = \sphericalangle F_1XF_2$ gilt.

6) Aus dem LWA 2016:
   (Gottfried Perz) Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

7) Aus dem LWA 2017:
   (Erich Windischbacher) Im gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist D der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Strecke CD. Die Gerade BM schneidet AC in E. Man beweise, dass AC dreimal so lang wie CE ist.

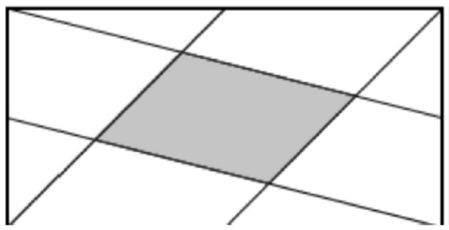
50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur GEOMETRIE (Aufgaben 8 bis 14)

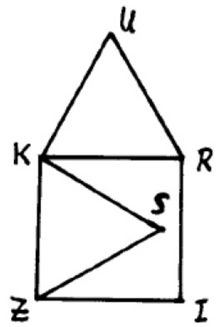
8) Geometriebeispiel aus dem Kurswettberwerb für Anfänger (in weiterer Folge mit KWA abgekürzt) 2017

9) Geometriebeispiel aus dem KWA 2018

10) In einem Rechteck wird jede Ecke mit dem Mittelpunkt einer der gegenüberliegenden Seiten so verbunden, dass im Inneren des Rechtecks ein Viereck entsteht (grau hinterlegt, vgl. Abb.).
a) Zeige: Das entstandene Viereck ist ein Parallelogramm.
b) Wieviel Prozent der Rechtecksfläche entfallen auf das Parallelogramm?

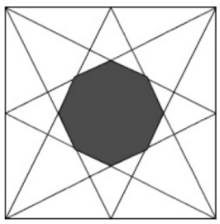


11) ZIRK ist ein Quadrat. Die Dreiecke KRU und ZSK sind gleichseitig.
Begründe: Der Punkt S liegt auf der Gerade UI.



12) Verbindet man die Seitenmittelpunkte eines gegebenen Quadrats mit den gegenüberliegenden Quadratecken, so entsteht im Innern ein Achteck.

Bestimme den Flächenanteil, den das Achteck überdeckt.



13) Aus dem LWA 2000:
Sei $ABCDEFG$ die Hälfte eines regelmäßigen Zwölfecks.

Sei P der Schnittpunkt der Geraden AB und GF und Q der Schnittpunkt der Geraden AC und GE.

Man zeige: Q ist der Umkreismittelpunkt ds Dreiecks AGP.

14) Aus dem LWA 2001:
Es sei ABC ein Dreieck mit den Winkeln α und β größer als 45°.

Über der Seite AB errichten wir ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck ABR mit der Hypotenuse AB und R im *Inneren* des Dreiecks ABC.

Analog errichten wir über BC und AC gleichschenkelig rechwinkleige Dreiecke CBP und ACQ, aber mit den Ecken P und Q (jeweils beim rechten Winkel) *außerhalb* des Dreiecks ABC.

Man zeige, dass $CQRP$ ein Parallelogramm ist.

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur GEOMETRIE (Aufgaben 15 bis 19)

15) Aus dem LWA 2003:

Man zeige: Jedes einem Quadrat umschriebene Rechteck ist selbst ein Quadrat.

(Ein Rechteck ist einem Quadrat umschrieben, wenn auf jeder Rechteckseite genau ein Eckpunkt des Quadrats liegt.)

16) Aus dem LWA 2013:

Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und D ein Punkt auf der Höhe durch C. Es seien E, F, G bzw. H die Mittelpunkte der Strecken AD, BD, BC bzw. AC.

Man zeige, dass E, F, G und H ein Rechteck bilden.

17) Geg.: Trapez ABCD mit Diagonalenschnittpunkt E

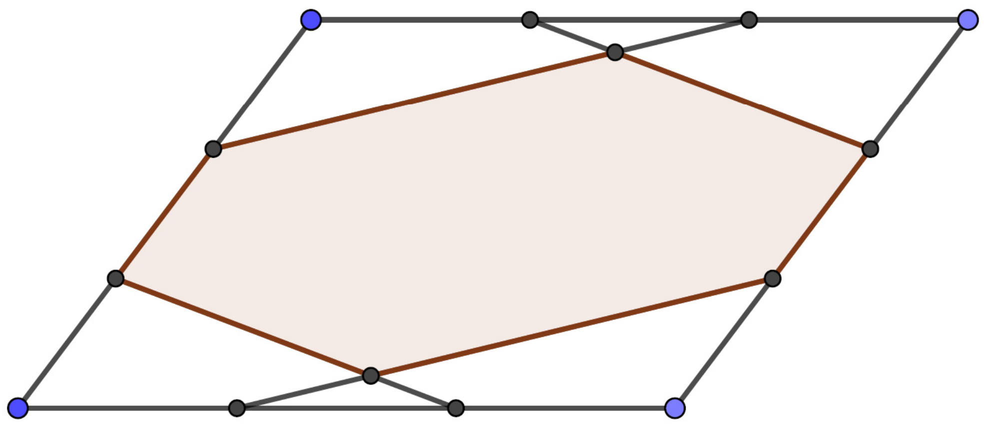
A_1	…	Flächeninhalt des Dreiecks ABE
A_2	…	Flächeninhalt des Dreiecks CDE
A_3	…	Flächeninhalt des Dreiecks AED
A_4	…	Flächeninhalt des Dreiecks EBC
A'	…	Flächeninhalt des Trapezes

Zeige: a) $A' = \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)^2$, b) $A_3 = A_4$

18) Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden Quadrate errichtet, deren “neue” (äußere) Eckpunkte ein Sechseck bestimmen.

Ges.: Formel für den Flächeninhalt F des Sechsecks in Abhängigkeit der Katheten a und b

19) In der unteren Abbildung wurden die Seiten eines Parallelogramms in jeweils drei gleich lange Teile geteilt, woraus sich durch Verbindung bestimmter Teilungs- und Eckpunkte das innerhalb des Parallelogramms gefärbte Sechseck ergibt. Man beweise, dass selbiges mehr als die Hälfte der Parallelogrammfläche einnimmt. Ferner gebe man den exakten Bruchteil des Sechsecksflächeninhalts am Parallelogrammflächeninhalt an.

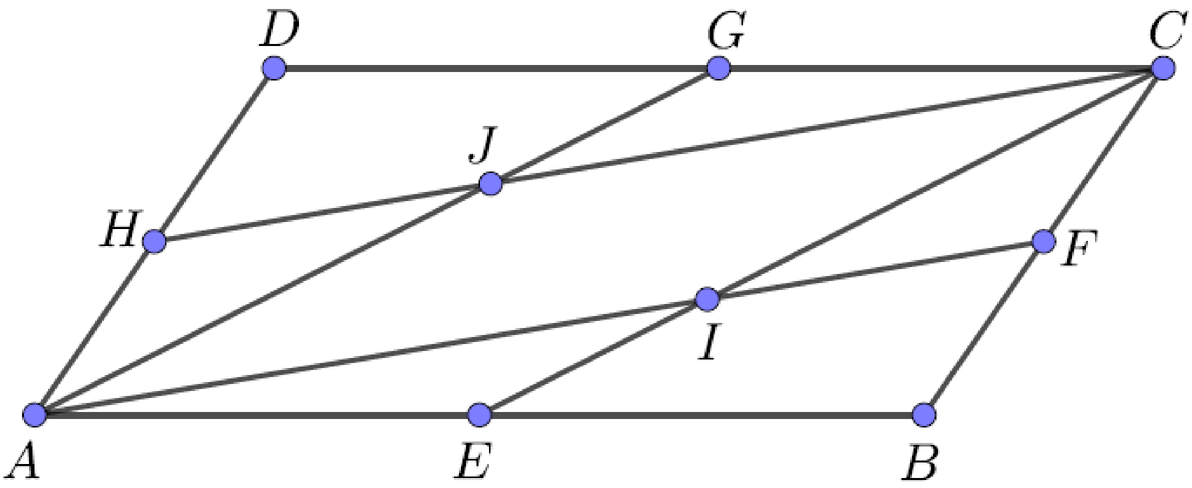


50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur GEOMETRIE (Aufgaben 20 bis 23)

20) Beweise: Die Winkelsymmetrale des von den Katheten eingeschlossenen Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert die Fläche des Hypotenusenquadrats.

21) In der unteren Abbildung sind E, F, G und H die Seitenmittelpunkte eines beliebigen Parallelogramms ABCD. Welchen Bruchteil des Parallelogramms nimmt das Parallelogramm AICJ ein?



22) Beweise: Werden auf zwei Seiten eines Dreiecks nach außen Quadrate aufgesetzt, so bilden die Mittelpunkte der beiden Quadrate, der Mittelpunkt der nicht verwendeten Dreiecksseite sowie der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden benachbarten Eckpunkte der beiden Quadrate wieder ein Quadrat.
(Siehe auch Abbildung auf der nächsten Seite neben der Angabe von Aufgabe 25.)
Bemerkung zu Aufgabe 22: Selbige geht auf den Zahnarzt und Hobbymathematiker Leon BANKHOFF (1908-1997) zurück, der über 60 Jahre diverse prominente Hollywoodschauspieler in seiner Praxis in Beverly Hills behandelte.

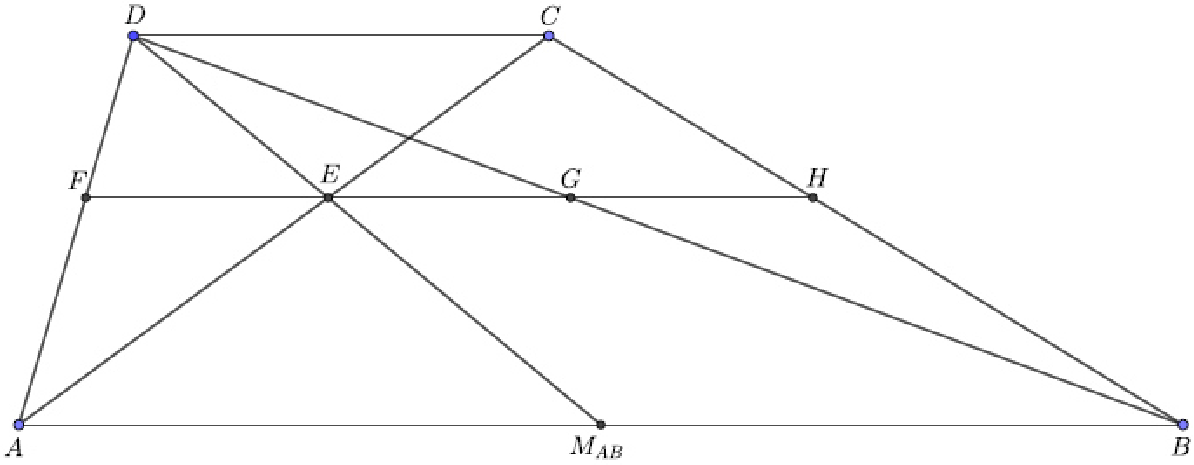
23) Beweise: Es sei D ein Punkt auf der Seite AB eines Dreiecks ΔABC. Die Parallele zu g_{CD} durch A bzw. B schneide g_{BC} bzw. g_{AC} in F bzw. E. Dann gilt

$$\frac{1}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{BE}}.$$

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

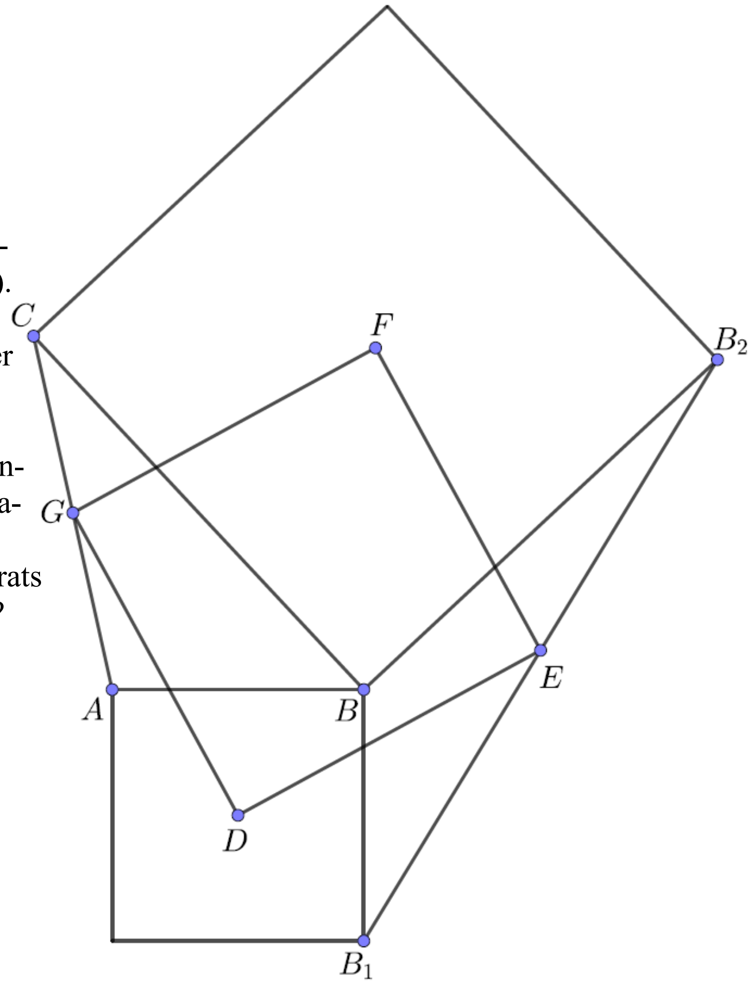
Übungen zur GEOMETRIE (Aufgaben 24 bis 26)

24) Beweise: $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{GH}$. Dabei ist ABCD ein Trapez und M_{AB} der Mittelpunkt der Seite AB.



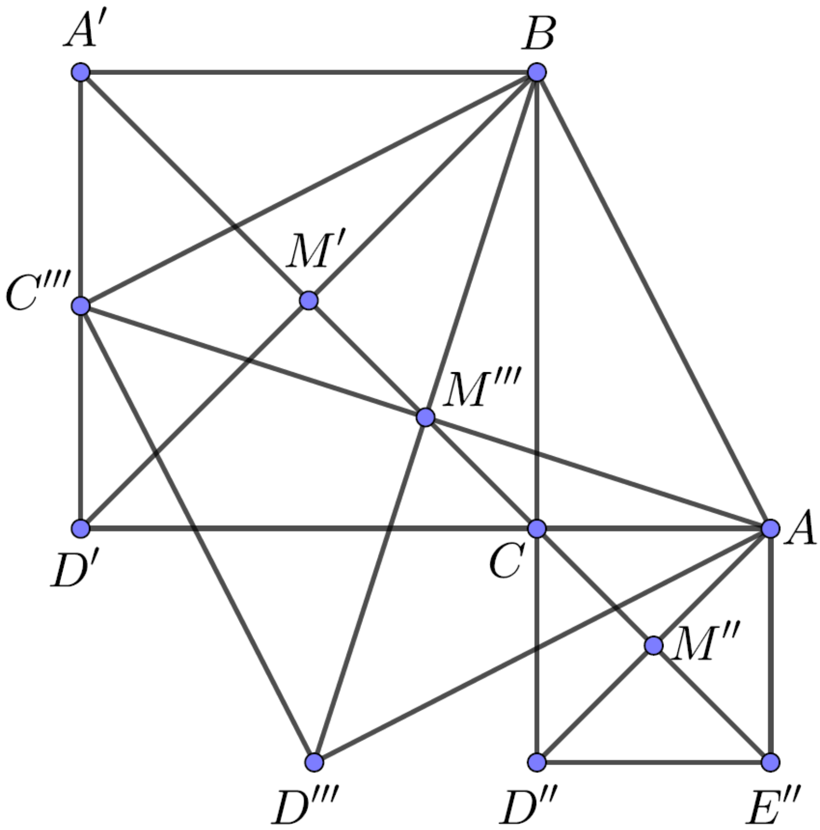
25) Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC werden jeweils nach außen Quadrate errichtet. Beweise, dass deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen (Siehe auch erste Abbildung auf der nächsten Seite.).

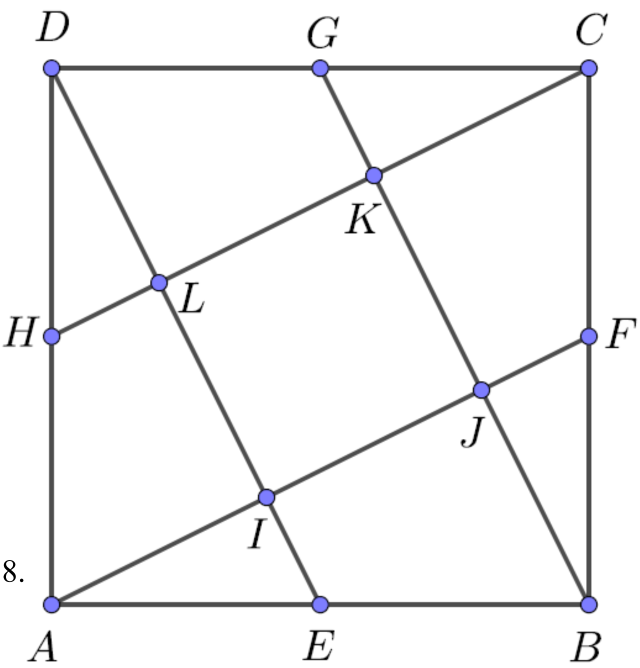
26) Wie in der zweiten Abbildung auf der nächsten Seite illustriert geht durch vier Verbindungen der Seitenmittelpunkte E, F, G und H mit entsprechenden Eckpunkten eines beliebigen Quadrats ABCD ein neues Quadrat IJKL hervor. Welchen Bruchteil des Quadrats ABCD nimmt das Quadrat IJKL ein?



50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur GEOMETRIE
(Abbildungen zu den Aufgaben 25 und 26)





Wien, im Juli 2018. Dr. Robert Resel, eh.