GLEICHUNGEN

&

„SPIELTHEORIE“

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zu GLEICHUNGEN & „SPIELTHEORIE“ (Aufgaben 1 bis 7)

1) Aus dem Landeswettbewerb für Anfänger (in weiterer Folge mit LWA abgekürzt) 2010:
(Walther Janous) In einem Nationalpark steht eine Baumgruppe von Mammutbäumen, die alle ein positives ganzzahliges Alter haben. Ihr Durchschnittsalter beträgt 41 Jahre. Nachdem ein 2010 Jahre alter Baum vom Blitz zerstört wird, sinkt das Durchschnittsalter auf 40 Jahre.

   Wie viele Bäume waren ursprünglich in der Gruppe? Höchstens wie viele von ihnen waren genau 2010 Jahre alt?

2) Aus dem LWA 2011:
(Gerhard Kirchner) Es seien p und q reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

   habe die reellen Lösungen x_1 und x_2.

   Zusätzlich gelten die folgenden zwei Bedingungen:

   (i) Die Zahlen x_1 und x_2 unterscheiden sich voneinander um genau 1.

   (ii) Die Zahlen p und q unterscheiden sich voneinander um genau 1.

   Man zeige, dass p, q, x_1 und x_2 ganze Zahlen sind.

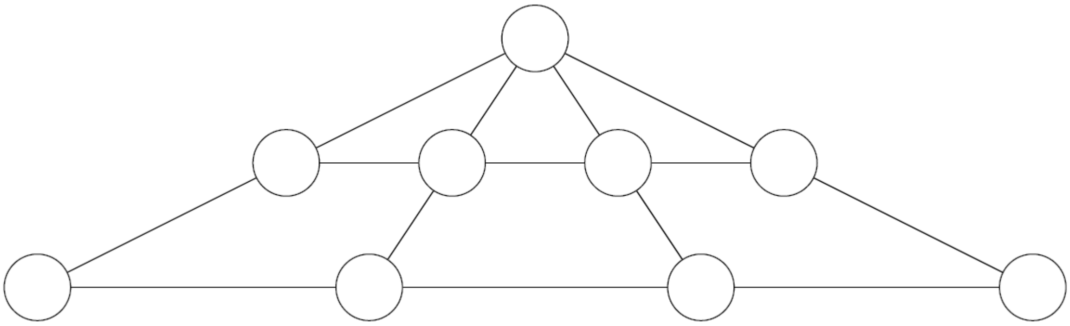
3) Aus dem LWA 2015:
(Richard Henner) Anton wählt eine beliebige ganze Zahl $n \geq 0$, die keine Quadratzahl ist, als Startzahl. Berta addiert dazu die nächstgrößere ganze Zahl $n + 1$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat sie gewonnen. Andernfalls addiert Anton zur Summe die nächstgrößere ganze Zahl $n+2$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat er gewonnen. Andernfalls ist wieder Berta am Zug und addiert die nächstgrößere ganze Zahl $n + 3$, und so weiter.

   Man zeige, dass es unendlich viele Startzahlen gibt, mit denen Anton gewinnt.

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zu GLEICHUNGEN & „SPIELTHEORIE“ (Aufgaben 4 bis 7)

4) Aus dem LWA 2016:
(*Walther Janous*) Wir betrachten die folgende Figur:



Wir suchen Beschriftungen der neun Felder in der Figur mit den Zahlen 1, 2, …, 9. Dabei soll jede dieser Zahlen genau einmal verwendet werden. Weiters sollen die sechs Summen von jeweils drei bzw. vier Zahlen längs der eingezeichneten geraden Verbindungen gleich sein.
Man gebe eine solche Beschriftung an.
Man zeige, dass bei allen solchen Beschriftungen im obersten Feld die selbe Zahl steht.
Wie viele solche Beschriftungen gibt es insgesamt? (Zwei Beschriftungen sind verschieden, wenn sie sich in mindestens einem Feld unterscheiden.)

5) Aus dem LWA 2017:
(*Richard Henner*) Anton schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 2 teilbar sind. Berta schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 3 teilbar sind. Clara schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 4 teilbar sind. Die ordnungsliebende Dora notiert die von den anderen aufgeschriebenen Zahlen. Dabei ordnet sie die Zahlen der Größe nach und schreibt keine Zahl mehrfach an. Wie lautet die 2017. Zahl in ihrer Liste?

6) Aus dem LWA 2018:
Zu einer gegebenen ganzen Zahl $n \geq 4$ untersuchen wir, ob es eine Tabelle mit drei Zeilen und n Spalten gibt, die mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 3n$ gefüllt werden kann, sodass

- sich in jeder Zeile die selbe Summe z ergibt und
- sich in jeder Spalte die selbe Summe s ergibt.

Man zeige: Wenn n gerade ist, gibt es keine solche Tabelle.

(Gerhard J. Woeginger)

7) Aus dem LWA 2001:
Wie betrachten die quadratischen Gleichungen $x^2 - 2mx - 1 = 0$, wobei m eine beliebige reelle Zahl sein kann.

Für welche Werte von m hat die Gleichung zwei reelle Lösungen, für die die Summe ihrer Kuben das Achtfache ihrer Summe ist?

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zu GLEICHUNGEN & „SPIELTHEORIE“ (Aufgaben 8 bis 13)

8) Aus dem LWA 2003:
Für die reellen Zahlen x und y gilt $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 10$ und $\lfloor\sqrt{y}\rfloor = 14$. Wie groß ist

$$\left\lfloor\sqrt{\left\lfloor\sqrt{\lfloor x+y\rfloor}\right\rfloor}\right\rfloor?$$

(Bemerkung: Die Quadratwurzeln sind die positiven Werte.)

9) Aus dem LWA 2004:
Man bestimme den Wert des Parameters m so, dass die Gleichung

$$(m-2)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - (6m^2 - 2) = 0$$

reelle Lösungen hat, und die Summe der dritten Potenzen dieser Lösungen Null ergibt.

10) Aus dem LWA 2006:
Sei n eine gerade positive ganze Zahl.

Wir betrachten Rechtecke mit den ganzzahligen Seitenlängen k und $k+1$, wobei k größer als $\frac{n}{2}$ und höchstens gleich n ist.

Man zeige: Für alle geraden positiven ganzen Zahlen n ist die Summe der Flächen der jeweils betrachteten Rechtecke gleich

$$\frac{n(n+2)(7n+4)}{24}.$$

11) Beweise: Sind p und q die Hypotenusenabschnitte und c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so hat die quadratische Gleichung $\boxed{(x-p)\cdot(x-q)+(x-q)\cdot(x-c)+(x-c)\cdot(x-p)=0}$ stets zwei verschiedene reelle Lösungen.

12) a und b seien die Katheten, c die Hypotenuse, p und q die Hypotenusenabschnitte sowie h die Höhe auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Zeige, dass die quadratische Gleichung $\boxed{(x-p)(x-q)+(x-a)(x-b)-(x-c)(x-h)=0}$ genau dann zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat, wenn $a+b>3h$ gilt!

13) a und b seien die Katheten, c die Hypotenuse und h die Höhe auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Beweise, dass die quadratische Gleichung $\boxed{(x+a^2)^2+(x+b^2)^2+2(x+c^2)(x+h^2)=0}$ stets zwei reelle Lösungen hat.

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zu GLEICHUNGEN & „SPIELTHEORIE“ (Aufgaben 14 bis 20)

14) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\boxed{\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}=x}$!

15) Gib eine quadratische Gleichung an, deren Lösungen x_1 und x_2 die ebdingungen $x_1{}^3 - x_2{}^3 = 9$ und $x_1 - x_2 = 3$ erfüllen

16) **Beweise, dass für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + 4ax + a^2 = 1$ für jeden Wert des Parameters a die Ungleichung $x_1{}^4 + x_2{}^4 \geq 2$ gilt. Wann tritt Gleichheit ein?**

17) Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit den Eigenschaften $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und $ab + cd = 0$. Beweise, dass dann $a^2 = d^2$ und $b^2 = c^2$ gilt!

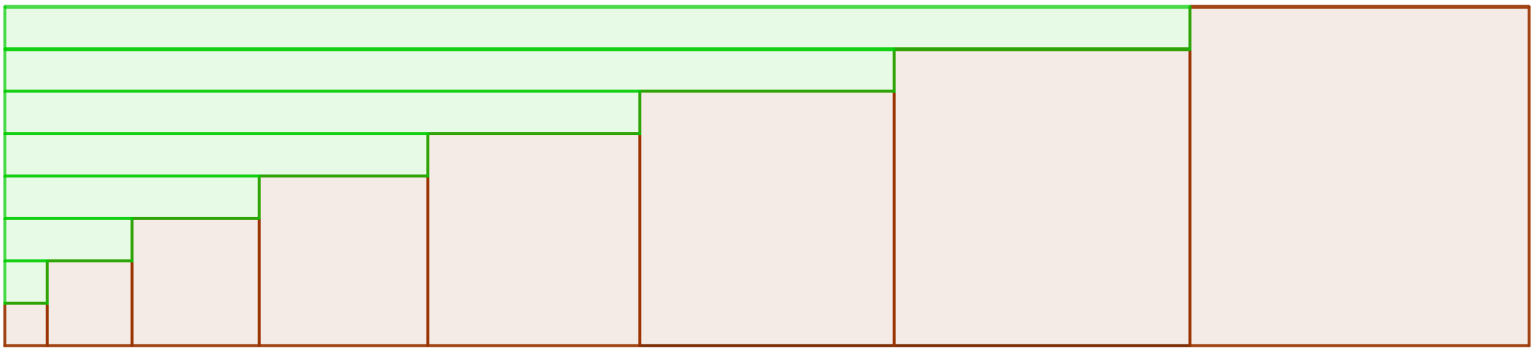
18) Löse für jeden Parameter a die Gleichung $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = a$!

19) Beweise: Die Gleichung $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$ hat für beliebige reelle Zahlen p, q (wobei $p \neq q$) und a (wobei $a \neq 0$) stets zwei verschiedene reelle Lösungen.

20) In der unteren Figur ist die Summe der ersten n Quadratzahlen für n=8 grafisch in weinrot unterlegt, was zusammen mit den schmalen (Wie schmal?) grün unterlegten Streifen ein Rechteck ergibt. Leite unter Anwendung der GAUSSschen Formel

$$s = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$ sowie der Figur eine entsprechende Summenformel für

$$s_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$ her!



50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zu GLEICHUNGEN & „SPIELTHEORIE“ (Aufgaben 21 samt Anleitung)

21) Für die in Aufgabe 20 erwähnte GAUSSsche Formel sieht ein (auf das Wesentliche verkürzter) Beweis etwa wie folgt[1] aus:

$$s := \sum_{k=1}^{n} k,$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} s & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ s & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

$$2s = n \cdot (n+1)$$

$$s = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Wie lässt sich dieser Beweis auf $t_n := \sum_{k=1}^{n} k^3$ übertragen, wobei die folgenden Hinweise[2] gegeben werden sollen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} t_n & = & 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & + & \ldots & + & (n-2)^3 & + & (n-1)^3 & + & n^3 \\ t_n & = & n^3 & + & (n-1)^3 & + & (n-2)^3 & + & \ldots & + & 3^3 & + & 2^3 & + & 1^3 \end{array}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$2t_n = (n+1) \cdot \begin{bmatrix} 1^2 & -1 \cdot n & +n^2 \\ +2^2 & -2 \cdot (n-1) & +(n-1)^2 \\ +3^2 & -3 \cdot (n-2) & +(n-2)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ +n^2 & -n \cdot \underbrace{[n-(n-1)]}_{=n-n+1=1} & +1^2 \end{bmatrix},$$

$$2t_n = (n+1) \cdot \left[2s_n - \sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)\right]$$

$$2t_n = (n+1) \cdot \left[2s_n - n \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{s_n} - \sum_{k=1}^{n} k\right]$$

[1]: entnommen aus Resel, Robert (2017[2]): 20000 Kurven unter der Enveloppe. Logos, Berlin.

[2]: Detto! (Wird auch gelegentlich als Buchpreis für den Kurswettbewerb verwendet! ☺)

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zu GLEICHUNGEN & „SPIELTHEORIE“ (Aufgaben 22 und 23)

22) Löse die quadratische Gleichung
$$\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)x^2+4n^3\cdot(1+2+\ldots+n)^2x+\frac{36n^6}{(2n+1)^2}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)^2=0$$
in Abhängigkeit von n!

23) Löse die Gleichung $\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}$, wobei m eine Formvariable ist!

24)

Wien, im Juli 2018. Dr. Robert Resel, eh.