



48. Österreichische Mathematische Olympiade 2017

Kurswettbewerb für Anfänger

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Termin: Di, 23. Mai 2017

Arbeitszeit: 3 Stunden

1. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b werden nach außen Quadrate aufgesetzt. Man beweise für das aus den Mittelpunkten dieser Quadrate hervorgehende Dreieck die Formel

8P

$$\mathcal{A} = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

für dessen Flächeninhalt \mathcal{A} und zeige ferner, dass die Höhe auf jene der drei Seiten dieses Dreiecks, welche dem Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats gegenüberliegt, durch den Kathetenschnittpunkt des Ausgangsdreiecks hindurchgeht.

2. Es sei $a \in \mathbb{R}$ sowie $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < a$. Man beweise $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ die Ungleichung

8P

$$\frac{x^2 + a^2}{x + a} - \frac{x^2 + b^2}{x + b} \leq a - b.$$

Für welche(s) $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt Gleichheit?

3. Beweise: $12 \mid n^5 - 4n^4 + 5n^3 - 2n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

8P

Gutes Gelingen!