48. Österreichische Mathematische Olympiade 2017

Übungen für den Kurswettbwerb

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. Über den Seiten eines Parallelogramms mit den Seitenlängen a und b werden nach außen Quadrate aufgesetzt. Man beweise, dass das aus den Mittelpunkten dieser Quadrate hervorgehende Viereck selbst ein Quadrat ist und zeige die Formel
$$\mathcal{A} = \frac{a^2 + b^2}{2} + \mathcal{A}'$$
für dessen Flächeninhalt $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}'$ den Flächeninhalt des Parallelogramms bezeichnet.

2. Über den Seiten eines gleichschenkligen Trapezes mit den Parallelseitenlängen a und c sowie der Höhe h werden nach außen Quadrate aufgesetzt. Man beweise, dass das aus den Mittelpunkten dieser Quadrate hervorgehende Viereck ein Deltoid ist und zeige die Formel
$$\mathcal{A} = \left(\frac{a+c}{4} + \frac{h}{2}\right)^2$$
für dessen Flächeninhalt $\mathcal{A}$.

3. Es sei $a \in \mathbb{R}$ sowie $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < a$. Man beweise $\forall x > a^2$ die Ungleichung
$$\frac{x+a^2}{x-a^2} + \frac{x-b^2}{x+b^2} \geq \frac{4ab}{a^2+b^2}.$$
Für welche(s) $x > a^2$ gilt Gleichheit?

Kurswettbewerb für Anfänger (Mi, 23. Mai 2007)

1) Im Quadrat ABCD wird der Diagonalenschnittpunkt M am Eckpunkt C gespiegelt, wodurch der Punkt E entsteht. Mit S_1, S_2, S_3 und S_4 seien die Schwerpunkte der Dreiecke ΔABE, ΔBCE, ΔCDE und ΔADE bezeichnet.

   a) Beweise, dass das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ wieder ein Quadrat ist.
   Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Quadrate $S_1S_2S_3S_4$ und ABCD?

   b) Es bezeichne S den Diagonalenschnittpunkt des Quadrats $S_1S_2S_3S_4$.
   Beweise, dass M, S, C und E in dieser Reihenfolge kollinear liegen und dass der Doppelbruch $\dfrac{\overline{MS}:\overline{SC}}{\overline{ME}:\overline{EC}}$ den Wert 1 hat (Man sagt dann, dass die Punkte M, S, C und E zueinander *harmonisch* liegen.)!

2) Beweise: $\boxed{8 \mid n^4 + 6n^3 + 7n^2 - 14n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

3) a und b seien die Katheten, c die Hypotenuse und h die Höhe auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Beweise, dass die quadratische Gleichung $\boxed{(x+a^2)^2 + (x+b^2)^2 + 2(x+c^2)(x+h^2) = 0}$ stets zwei reelle Lösungen hat.