50. Österreichische Mathematische Olympiade 2019

Vorbereitungskurs für Anfänger

Weitere vermischte Übungsaufgaben

(Zahlentheorie, Ungleichungen)

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Kursort: GRgORg Wien 22, Heustadelgasse 4

1. **Warm-up:**
   Beweise: $48 \mid n^3 - 4n \;\; \forall n \in \mathbb{N}_g$

2. Beweise: $3 \mid n + (n+1) + ... + 2n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

3. Beweise: Die um 2 verminderte Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

4. Beweise: Die um 11 verminderte Summe der Quadrate von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist stets durch 24 teilbar.

5. Gegeben seien zwei positive Zahlen x und y, deren Summe gleich ihrem Produkt ist. Beweise, dass dann die Ungleichung $(x+1)(y+1) \geq 9$ gilt!

6. Beweise: $60 \mid n^6 - n^2 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

7. Beweise, dass das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist!

8. Beweise: Gilt $2 \mid n$ sowie $4 \nmid n$, dann gilt $288 \mid 3n^5 - 48n$. Kannst du 288 durch eine noch größere Zahl ersetzen?

9. Beweise für alle reellen Zahlen x und y die Ungleichung $x^2 + 2y^2 + 2 > 2y(x+1)$!

10. (a) Beweise: $24 \mid n^5 - 13n^3 + 36n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
    (b) Wodurch kann man 24 ersetzen, falls n gerade ist?
    (c) Wodurch kann man 24 ersetzen, falls n durch 3 teilbar ist?

11. Beweise: $48 \mid n^3 + 12n^2 + 44n + 48 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_g$

12. Beweise für alle reellen Zahlen x und y die Ungleichung $(x+y+1)^2 \geq (2x+1)(2y+1)$!

13. Beweise für alle positiven reellen Zahlen a und b die Ungleichung $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. Wann tritt Gleichheit ein?

14. Beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Hypotenusenabschnitten größer oder gleich dem doppelten Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe der Hypotenuse. Wann tritt Gleichheit ein?

15. Beweise: $\boxed{96 \mid n^4 + 8n^3 + 14n^2 - 8n - 15 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_u}$; kannst du 96 durch eine größere Zahl ersetzen?

16. Beweise: $384 \mid n^4 - 10n^2 + 9 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_u$