Drehen von Ebenen – eine(!) Schnittstelle zwischen Mathematik und Darstellender Geometrie

von Dr. Robert Resel
AHS-Lehrer für Mathematik in Wien

Im $\mathbb{R}^3$ liegt das *ebene Viereck* $ABCD[A(-4/-18/20),\ B(12/-16/10),\ C(44/-27/5),\ D(22/-26/z_D)]$.

- Berechne die Koordinaten der Eckpunkte jenes Vierecks, welches durch Drehen dieses Vierecks in π_1 entsteht (2 Lösungen, siehe untere Abbildung!) und verifiziere die Invarianz des Flächeninhalts unter dieser Abbildung sowie (herausragende Eigenschaft dieses speziellen Beispiels!) den Sachverhalt, dass $\{D_S\} = g_{A_0B_0} \cap g_{A_0{}'B_0{}'}$ gilt.

- **Satz.** Es sei $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ein *normierter* Normalvektor einer durch den Koordinatenursprung verlaufenden Ebene ε. Dann vermitteln die Matrizen M_1 bzw. M_2 die beiden möglichen Paralleldrehungen der Ebene ε in die Koordinatenebene π_1:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{b^2+a^2c}{a^2+b^2} & \frac{ab(c-1)}{a^2+b^2} & -a \\ \frac{ab(c-1)}{a^2+b^2} & \frac{a^2+b^2c}{a^2+b^2} & -b \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2c}{a^2+b^2} & \frac{-ab(c+1)}{a^2+b^2} & a \\ \frac{-ab(c+1)}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2c}{a^2+b^2} & b \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$$

  Verifiziere diesen Satz am konkreten Beispiel!