



39. ÖSTERREICHISCHE MATHEMATIK-OLYMPIADE
QUALIFIKATIONSWETTBEWERB OBERÖSTERREICH
4. APRIL 2008

1. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen ganzzahlig sind, spricht man von einem pythagoräischen Zahlentripel.

- (a) Zeige: In solchen Dreiecken ist der Inkreisradius auch immer ganzzahlig.
(b) Zeige: In solchen Dreiecken sind nie beide Kathetenlängen ungerade.

2. (a) Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y, z gilt:

$$10x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geq 2xy + 4yz + 6zx$$

(b) Für welche natürlichen Zahlen n gilt:

$$n^2 + 2008 < 3^n$$

3. Zeige:

$$\sum_{i=1}^n (2i)^5 = 32 + 1024 + \dots + (2n)^5 = \frac{8n^2(n+1)^2((n+1)^2 + n^2 - 2)}{3}$$

4. Löse folgendes Gleichungssystem in \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}x + y + z^2 &= 6 \\2xy + 3z^4 &= 44 \\x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16\end{aligned}$$

Arbeitszeit: 180 Minuten