Carl Friedrich GAUSS (1777-1855)

„Die Mathematik ist die Königin der Naturwissenschaften
und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik.“

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur ZAHLENTHEORIE (Aufgaben 1 bis 16)

1) Beweise, dass 60% der Ziffern des dekadischen Zahlensystems als Einerziffer für Quadratzahlen in Frage kommen!

2) Beweise, dass 20% der echt zweistelligen Zahlen des dekadischen Zahlensystems als Endziffern (also Zehner- und Einerziffer) für Quadratzahlen in Frage kommen!

3) Beweise: Ungerade Quadratzahlen lassen bei Division durch 4 alle den Rest 1 (Lässt sich daraus noch mehr schließen?).

4) Beweise: Quadratzahlen lassen bei Division durch 3 nie den Rest 2.

5) Beweise: Quadratzahlen lassen bei Division durch 5 nie die Reste 2 oder 3.

6) Beweise: Quadratzahlen lassen bei Division durch 6 nie die Reste 2 oder 5.

7) Beweise: Quadratzahlen lassen bei Division durch 7 nie die Reste 3, 5 oder 6.

8) Beweise: $12 \mid n^5 - 4n^4 + 5n^3 - 2n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

9) Beweise: $6 \mid n^6 + 3n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + 5n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

10) Beweise, dass $6 \mid n^4 + 5n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt!

11) Beweise, dass $10 \mid n^5 + 5n^3 + 4n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt!

12) Beweise, dass $8 \mid n^4 + 6n^3 + 7n^2 - 14n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt!

13) Marco nennt eine natürliche Zahl *folgsam*, wenn sie sich als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen schreiben lässt. Beispiel: Die Zahl 20 ist folgsam, da 20 = 4·5.
Zeige: Zu jeder folgsamen Zahl gibt es mindestens eine zweite folgsame Zahl, die mit der ersten multipliziert wieder eine folgsame Zahl ergibt.

14) An der Tafel stehen die ersten zehn Primzahlen. Viola schreibt mindestens einmal die Zahl 4 und mindestens einmal die Zahl 9 dazu. Der Durchschnitt aller nun an der Tafel stehenden Zahlen ist genau 10.
Wie viele Zahlen stehen jetzt mindestens an der Tafel?

15) Kann die Summe von 2011 bzw. 2012 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine Quadratzahl sein? Schreibe jeweils, sofern möglich, die Folge mit der kleinsten Startzahl auf.

16) Zeige: Die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 ist eine Quadratzahl.

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur ZAHLENTHEORIE (Aufgaben 17 bis 25)

17) Beweise: Die Summe der Quadrate von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen kann keine Quadratzahl sein.

18) Die Seitenlängen a,b,c eines Dreiecks sind ganzzahlig. Die Länge einer Höhe des Dreiecks ist die Summe der Längen der beiden anderen Höhen.
Weise nach: Der Term $a^2 + b^2 + c^2$ ist eine Quadratzahl.

19) Für welche natürlichen Zahlen n ist der Bruch $\frac{n-3}{n^2+2}$ kürzbar?

20) Die Zahlen p und q seien ein Primzahlzwillingspaar (= zwei Primzahlen, die sich um genau 2 unterscheiden) mit $3<p<q$.
Zeige, dass das arithmetische Mittel dieser beiden Primzahlen $m = \frac{p+q}{2}$ durch 6 teilbar ist und dass das um 1 vermehrte Produkt $p \cdot q + 1$ dieser beiden Primzahlzwillinge durch 36 teilbar ist.

21) Aus dem Landeswettbewerb für Anfänger (in weiterer Folge mit LWA abgekürzt) 2007:
(Walther Janous) Man zeige, dass die Zahl $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen n durch 10 teilbar ist.

22) Aus dem LWA 2009:
(Gerhard Kirchner) Zu jeder Seite eines Quadrats wird mit roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summe der grünen Zahlen sei 40.
Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich?

23) Aus dem LWA 2010:
(Birgit Vera Schmidt) Man zeige, dass 2010 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann.

24) Aus dem LWA 2012:
(Walther Janous) Es seien a, b, c und d vier ganze Zahlen, für die

$$7a + 8b = 14c + 28d$$

gilt.

25) Aus dem LWA 2018:
Für eine beliebige natürliche Zahl n bezeichnen wir die Anzahl der positiven Teiler von n mit $d(n)$ und die Summe dieser Teiler mit $s(n)$. Zum Beispiel ist $d(2018)$ gleich 4, weil 2018 vier Teiler hat (1, 2, 1009 und 2018) und $s(2018) = 1 + 2 + 1009 + 2018 = 3030$.
Man bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die $s(x) \cdot d(x) = 96$ gilt.

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur ZAHLENTHEORIE (Aufgaben 26 bis 29)

26) Aus dem LWA 2017:
(Karl Czakler) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{17} \right\rfloor$$

über der Menge der positiven ganzen Zahlen?
Dabei bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.

27) $126 = 6 \cdot 21$
Gibt es neben dem geordneten Zahlentripel

$$(x_1|y_1|z_1) = (1|2|6)$$

noch weitere positive ganzzahlige Lösungen zwischen 1 und 9 von

$$100x + 10y + z = z \cdot (10y + x)?$$

28) Wir beschäftigen uns mit der Fragestellung, ob die bemerkenswerte Division

$$\frac{5}{2} = 2.5$$

die einzige dieser Sorte ist, m.a.W.: besitzt die Gleichung

$$\frac{y}{x} = x + \frac{y}{10}$$

neben der Lösung

$$(x_1|y_1) = (2|5)$$

noch weitere positive ganzzahlige Lösungen zwischen 2 und 9?

29) Lässt sich dieses Muster fortsetzen (Beweis, keine weiteren Rechnungen!)?

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$

50. österreichische Mathematikolympiade: Vorbereitungskurs für Anfänger

Übungen zur ZAHLENTHEORIE (Aufgaben 30 bis 31)

30) Berechne in jeder Raute die Summe aller vorkommenden Zahlen! Wie geht es weiter (Vermutung? Beweis!)?

$$1 \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}$$

31) Aus dem LWA 2014:
(Walther Janous) Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b \cdot (b + 7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

32) bis 36): Aufgaben 1 bis 5 aus den aktuellen „Vermischten Übungsaufgaben“

37) Aufgabe 11 aus den aktuellen „Vermischten Übungsaufgaben“

38) Aufgabe 26 aus den aktuellen „Vermischten Übungsaufgaben“

39) Aufgabe 27 aus den aktuellen „Vermischten Übungsaufgaben“

40) Motivationsbeispiel der Undersite für den aktuellen Vorbereitungskurs auf www.matheprof.at

Wien, im Juli 2018. Dr. Robert Resel, eh.