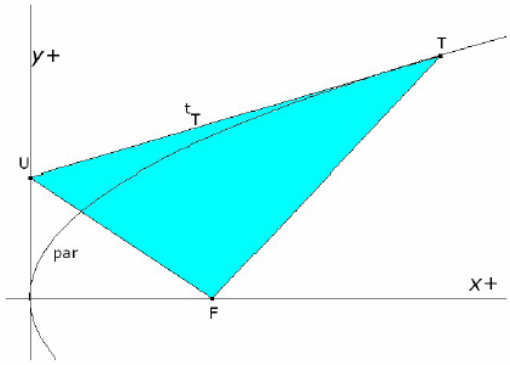
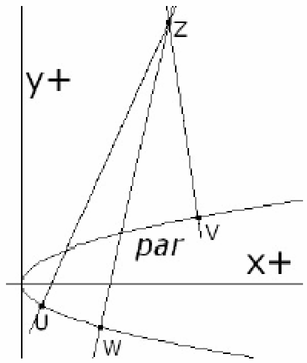
Übungsaufgaben (für SÜen, HÜen sowie zum eigenständigen Üben für die Schularbeit) zur analytischen Geometrie der Parabel
7A(G), 2011/12
(Dr. R. RESEL)

1)



Im Punkt $T(x_T|36)$ jener Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(3|0)$ wird wie in obiger Abbildung illustriert die Tangente t_T gelegt, wodurch ein Dreieck ΔUFT generiert wird. Verifiziere für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ dieses Dreiecks die Formel $\mathcal{A} = \dfrac{1}{4} \cdot y_T \cdot (x_T + x_F)$!

2)



$F(\frac{25}{2}|0)$ ist der Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage.

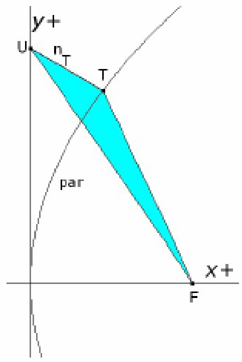
(a) Stelle eine Gleichung von par auf!

(b) In obiger Figur ist par zusammen den Punkten $U(x_U|-10)$ und $V(x_V|40)$ inkl. der entsprechenden Kurvennormalen samt Schnittpunkt Z abgebildet. Berechne die Koordinaten von Z!

(c) Wie aus der Abbildung ersichtlich gibt es noch einen dritten Parabelpunkt W, in dem die Kurvennormale auch durch Z verläuft. Für dessen $x-$Koordinate x_W gilt dann (wie sich zeigen läßt) allgemein die Gleichung $x_W = \frac{(y_1+y_2)^2}{2p}$, wobei p den Parabelparameter bezeichnet. Verifiere dies am konkreten Beispiel!

(d) Für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Dreiecks ΔUVW gilt (wie sich ebenso zeigen läßt) die Formel $\mathcal{A} = \frac{1}{8x_F} \cdot |(y_U - y_V)(y_U + 2y_V)(2y_U + y_V)|$. Kontrolliere dies auch!

3)



Im Punkt $T(x_T|36)$ jener Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(27|0)$ wird wie in obiger Abbildung illustriert die Kurvennormale n_T gelegt, wodurch ein Dreieck ΔUFT generiert wird. Verifiziere für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ dieses Dreiecks die Formel $\mathcal{A} = x_T \cdot y_T \cdot \left(\frac{x_T}{2p} + \frac{1}{4}\right)$, wobei p den Parabelparameter bezeichnet.

4) Für jede Parabel par in erster Hauptlage mit dem Parameter p gilt der folgende

SATZ. Ist $T(x_T|y_T)$ ein Punkt von par sowie n_T die Kurvennormale an par in T, dann gilt für die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts $R(x_R|y_R)$ von n_T und par die Darstellung $\boxed{x_R = x_T + 2p + \frac{p^2}{x_T},\ y_R = -y_T - \frac{2p^2}{y_T}}$.

Rechne dies für den Punkt T(3|12) nach!

5) Durch den Punkt T(1|–6) verläuft genau eine Parabel par in erster Hauptlage.

a) Ermittle eine Gleichung von par, zeige, dass auch der Punkt T´(81|54) auf par liegt und stelle sowohl in T als auch in T´ jeweils eine Gleichung der Tangente an par auf!

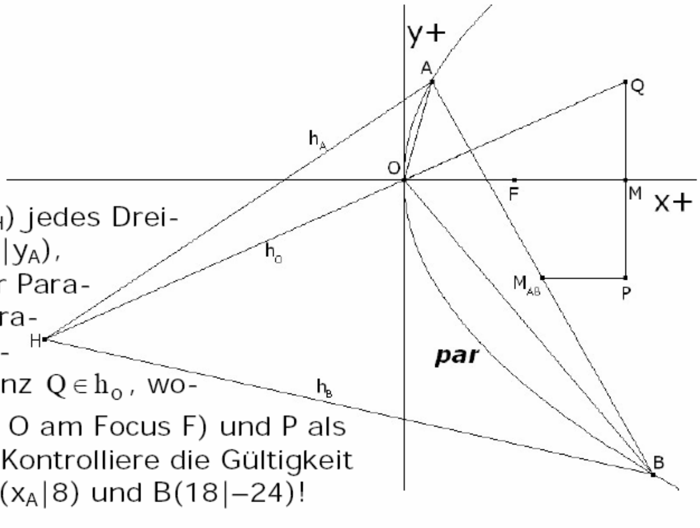
b) SATZ. Gelten für zwei Punkte $T(x_T|y_T)$ und $T'(x_{T'}|y_{T'})$ einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Parameter p die Gleichungen $\boxed{x_T \cdot x_{T'} = \frac{p^2}{4}}$ und $\boxed{y_T \cdot y_{T'} = -p^2}$, dann stehen die Tangenten an par in T und T´ aufeinander normal. Ferner gilt die ("fortlaufende") Formel $$\boxed{\overline{TT'} = x_T \cdot \left(\frac{2x_{T'}}{p} + 1\right)^2 = x_{T'} \cdot \left(\frac{2x_T}{p} + 1\right)^2}.$$

Überprüfe diesen Satz am Beispiel der Parabel par aus a)!

6) *Legt man durch einen Punkt $T(x_T|y_T)$ einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brenpunkt F und dem Parameter p sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T, dann begrenzen die y-Achse, t_T und n_T ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt A die Formel* $A = \frac{x_T y_T}{2p} \cdot \overline{FT}$ *gilt.*

Kontrolliere die Gültigkeit *dieses Lehrsatzes* für den Punkt T(2|8)!

7)

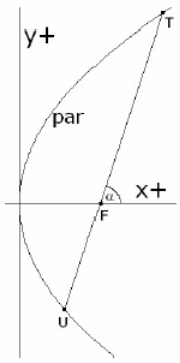


Für den Höhenschnittpunkt $H(x_H|y_H)$ jedes Dreiecks ΔABO, dessen Eckpunkte $A(x_A|y_A)$, $B(x_B|y_B)$ und (sic!) $O(0|0)$ auf einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Parameter p liegen, gilt die in nebenstehender Abbildung illustrierte Inzidenz $Q \in h_O$, wobei Q via M_{AB}, M (Spiegelpunkt von O am Focus F) und P als Spiegelpunkt von P an M entsteht. Kontrolliere die Gültigkeit dieser Darstellung für die Punkte $A(x_A|8)$ und $B(18|-24)$!

8) Liegen drei Punkte $A(x_A|y_A)$, $B(x_B|y_B)$ und $C(x_C|y_C)$ auf einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Parameter p, so gilt für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔABC die Formel $\mu = \frac{|y_A - y_B| \cdot |y_B - y_C| \cdot |y_C - y_A|}{4p}$.

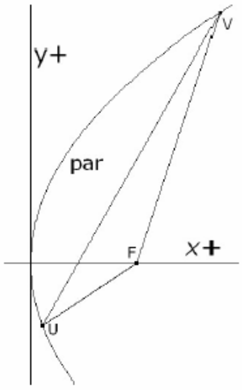
Kontrolliere die Gültigkeit dieser Formel für die Punkte $A(2|y_A<0)$, $B(x_B|12)$ und $C(32|24)$!

9)



Verifiziere anhand jener Parabel par in erster Hauptlage, welche t $[t: 4x - y + 36 = 0]$ als Tangente besitzt, für den Punkt $U(x_U|-216)$ die Formel $\overline{UT} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$, worin p den Parabelparameter bezeichnet. Der Rest ist obiger Abbildung zu entnehmen (Verwende - falls notwendig - die Parabelgleichung par: $y^2 = 576x$.).

10)



Für den Flächeninhalt μ des in obiger Figur abgebildeten Dreiecks ΔUFV gilt ausgehend von par [par: $y^2 = 2px$] die Formel $\mu = \frac{1}{4p} \cdot |y_U - y_V| \cdot (y_U y_V + p^2)$. Verifiziere dies für jene Parabel in erster Hauptlage, welche von $t: 3x - 4y + 96 = 0$ berührt wird, und zwar für den entsprechenden Berührungspunkt V sowie $U(x_U| -12)$!

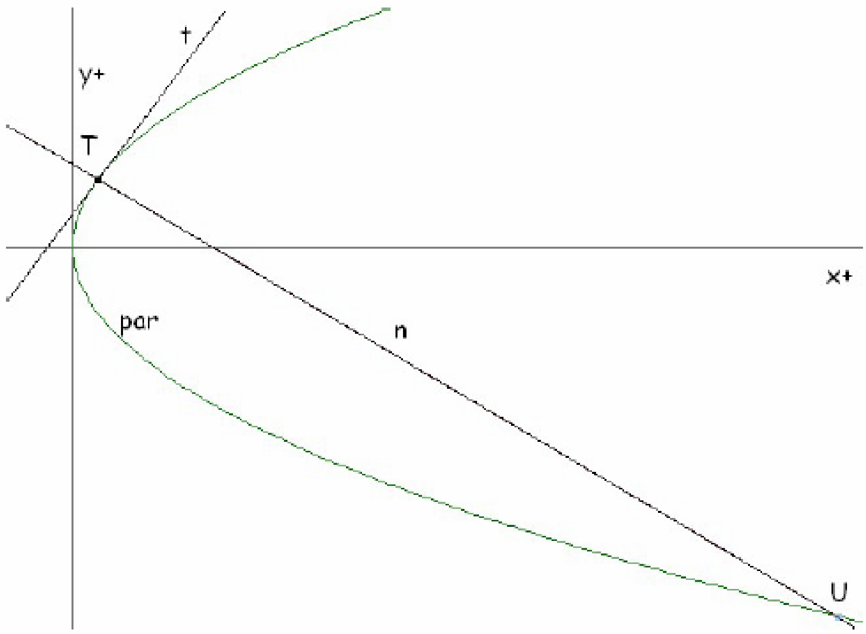
11) Ein schriftliches Reifeprüfungsbeispiel meiner ehemaligen „eigenen“ 8C(Rg) vom Mai 2009:

Gegeben ist die Parabel par in erster Hauptlage, welche durch die Tangente t_1 mit der Gleichung $t_1:\ y = 3x + 9$ eindeutig festgelegt ist.

Diese Parabel ist in Abbildung 3 auf dem Beiblatt gemeinsam mit der Tangente t und der Normale n in $T(x_T|36)$ eingezeichnet.

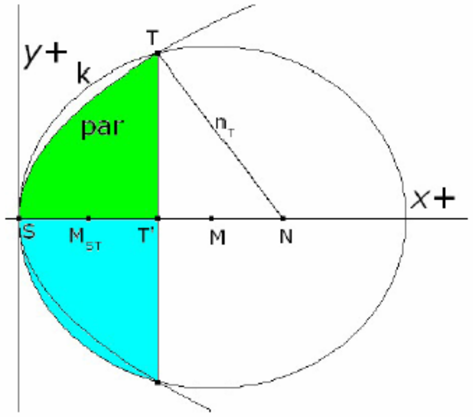
Verifiziere anhand des vorliegenden Beispiels folgende Formel für die Länge $\ell = \overline{TU}$, wobei vom Parabelparameter p, der Steigung k_t von t sowie von $T(x_T|y_T)$ und $U(x_U|y_U)$ ausgegangen wird: $\boxed{\ell = \sqrt{(3x_T + x_U + 2p) \cdot (y_T - y_U) \cdot k_t}}$
(Verwende - wenn notwendig - die richtige Parabelgleichung par.: $y^2 = 108x$.)

Abbildung 3



12) In untenstehender Figur ist n_T die Kurvennormale von par in T und ferner $\overline{SM_{ST}} = \overline{MN}$. Dann gilt folgender

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{MT}$ geht auch durch den Parabelscheitel S. Verifiziere diesen Satz für jene Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(8|0)$, und zwar für den Punkt $T(x_T|24)$.



13) Von einer Parabel par in erster Hauptlage kennt man mit $2x - y + 24 = 0$ eine Gleichung einer ihrer Tangenten.

(a) Ermittle eine Gleichung von par und gib die Koordinaten ihres Focus F an.

(b) $T(x_T|384)$ liegt auf par. Schneide die Gerade g_{FT} mit par, der zweite gemeinsame Punkt heiße T'.

(c) Zeige, dass die Tangenten t und t' an par in T und T' einander auf der Leitgerade von par rechtwinklig schneiden, der Schnittpunkt heiße L.

(d) Bestätige die Gültigkeit der Formel $\mu = \frac{1}{8p} \cdot (y_T - y_{T'})^3$ für den Flächeninhalt μ des Dreiecks $\Delta TLT'$!

14) $\boxed{\text{SATZ.}}$ Die Normalen an die Parabel par [par.: $y^2 = 2px$] in den Parabelpunkten $U(x_U|y_U)$ und $V(x_V|y_V)$ schneiden einander im Punkt $S(x_u + x_V + p + \frac{y_u y_v}{2p}| - \frac{x_u y_v + x_v y_U}{p})$.
Verifiziere diesen Satz für $U(32|8)$ und $V(x_V| - 4)$ oder beweise ihn!

15) Von einer Parabel in erster Hauptlage kennt man den Brennpunkt F(1|0).

a) Ermittle eine Gleichung von par, stelle in $T(x_T|6)$ eine Gleichung der Tangente t_T auf und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts U von t_T mit der Scheitelpunkttangente von par!

b) Berechne den Normalabstand d von t_T zum Parabelscheitel und kontrolliere am konkreten Beispiel nebenstehende allgemeingültige Formel!

$$\boxed{2d \cdot \overline{TU} = x_T \cdot y_T}$$

16) Von einer Parabel in erster Hauptlage kennt man den Brennpunkt F(12|0).

a) Ermittle eine Gleichung von par, stelle in $T(x_T|12)$ eine Gleichung der Tangente t_T auf und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts L von t_T mit der Leitgerade von par!

b) Kontrolliere am konkreten Beispiel die nebenstehende allgemeingültige Formel!

$$\boxed{\overline{TL}^2 \cdot x_T = \overline{TF}^3}$$

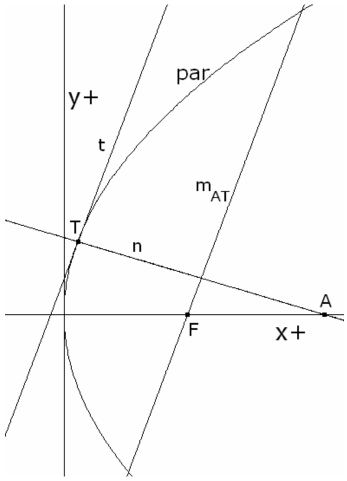
17) t_1: $3x-2y+24=0$ ist die Gleichung einer Tangente an eine Parabel par in erster Hauptlage.

a) Stelle eine Gleichung von par auf!

b) Lege im Punkt $T(x_T|12)$ sowohl die Tangente t als auch die Normale n an par.

c) Schneide n mit der Parabelachse, der Schnittpunkt heiße A.

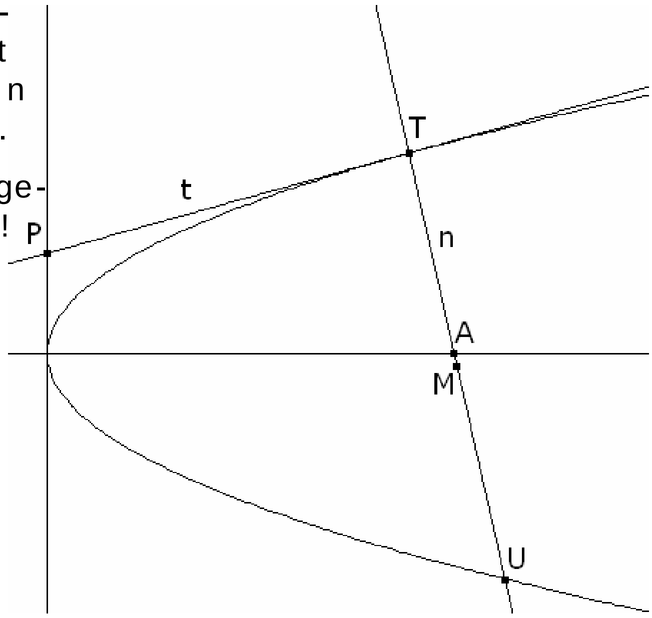
d) Verifiziere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, dass der Brennpunkt F von par auf der Streckensymmetrale m_{AT} liegt (vgl. Abbildung rechts!).



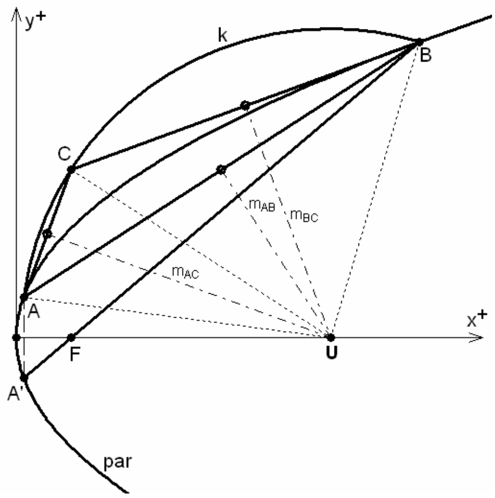
18) In nebenstehender Figur ist die Parabel par (par: $y^2=32x$) zusammen mit ihrer Tangente t und ihrer Normalen n im Parabelpunkt $T(x_T|64)$ abgebildet.

a) Berechne die Koordinaten der eingezeichneten Schnittpunkte P und U!

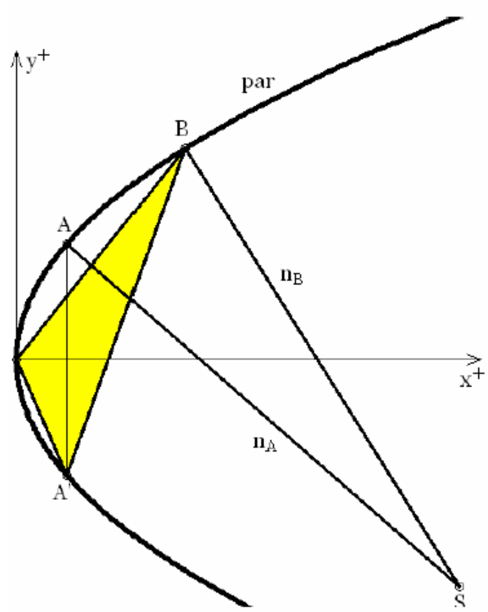
b) Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke TU und verifiziere am konkreten Beispiel die Gültigkeit der Formel $\boxed{p^2 \cdot \overline{PT} = |x_T \cdot y_T| \cdot \overline{AM}}$, worin p den Parabelparameter bezeichnet.



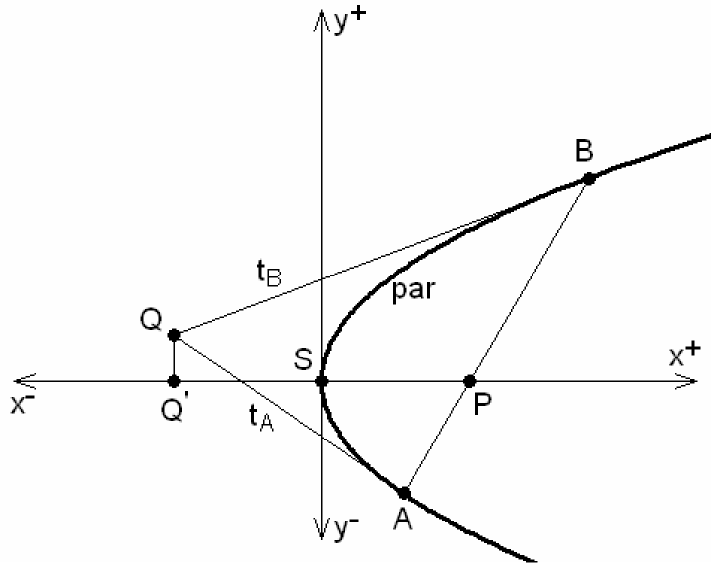
19) Liegen zwei Punkte A und B auf einer Parabel par derart wie in nebenstehender Abbildung illustriert und ist C der Schnittpunkt der Tangenten an par in A und B, so liegt der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC auf der Parabelachse. Verifiziere diesen Satz für den Punkt A'(1|–8)!



20) Gemäß nebenstehender Abbildung ist für die Punkte $A(x_A|12)$ und $B(12|24)$ einer Parabel par in erster Hauptlage die Gültigkeit des folgenden Lehrsatzes zu zeigen:
Für $\{S\}=n_A \cap n_B$ gilt $|y_S|=\frac{2}{p}\cdot A_{\Delta SA'B}$, wobei p den Parabelparameter und $A_{\Delta SA'B}$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta SA'B$ bezeichnet. Dabei ist A' der Spiegelpunkt von A an der Parabelachse.

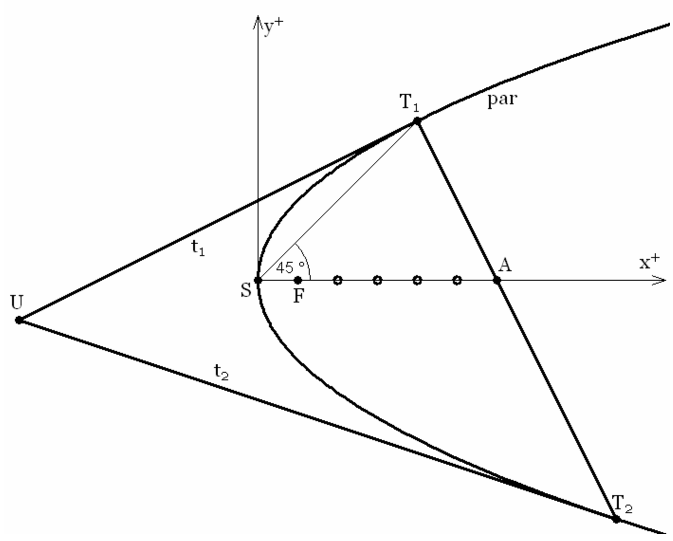


21) Bezüglich der in untenstehender Abbildung illustrierten Konfiguration gilt der folgende Satz. S ist der Mittelpunkt der Strecke PQ'. Verifiziere diesen Satz für die konkreten Punkte $A(2|-12)$ und $B(x_B|24)$!

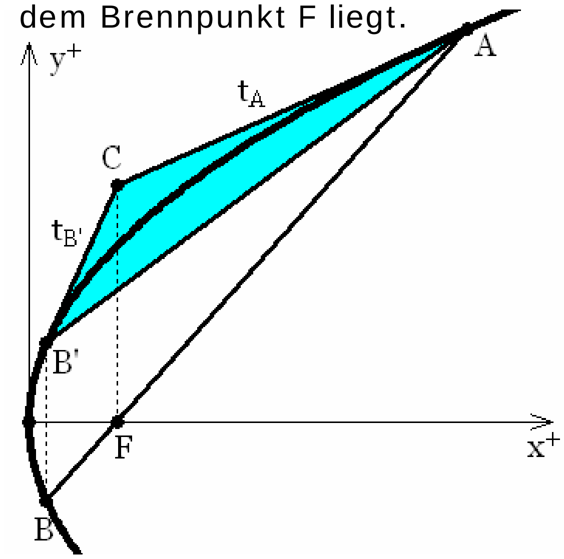


22) Durch $C(32|48)$ geht eine Parabel par in erster Hauptlage.
a) Zeige, dass die Normalen an par in den Punkten $A(x_A|-12)$, $B(x_B|-36)$ und C einander in einem Punkt D schneiden. Gib die Koordinaten von D an!
b) Verifiziere am konkreten Beispiel den folgenden
Satz. Schneiden einander die Kurvennormalen dreier Punkte A, B und C einer Parabel in erster Hauptlage in einem Punkt, dann gilt für den Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ des Dreiecks ΔABC die Formel $x_U=\frac{1}{4}\cdot(x_A+x_B+x_C)+p$, wobei p den Parabelparameter bezeichnet.

23) In nebenstehender Abbildung ist F der Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage, A entsteht durch fortlaufende Spiegelung von S an F. Verifiziere am k konkreten Beispiel $F(1|0)$, dass $\sphericalangle(t_1,t_2)=45°$ gilt.



24) Bezüglich der unteren Abbildung ist am konkreten Beispiel A(256|128) zu verifizieren, dass C direkt über dem Brennpunkt F liegt.



25) Eine Parabel par in erster Hauptlage geht durch den Punkt D(18/36).

a) Stelle eine Gleichung von par auf!

b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte B und C von par mit der durch die Punkte I(4/–14) und II(6/–20) verlaufende Gerade g!

c) Betrachte das Viereck ABCD mit A(0/0) und berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte $\{E\}=g_{AD}\cap g_{BC}$, $\{F\}=g_{AB}\cap g_{CD}$ und $\{G\}=g_{AC}\cap g_{BD}$. Das Dreieck ΔEFG heißt dann das Nebendreieck des Vierecks ABCD.

d) Zeige am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, dass die sechs möglichen Schnittpunkte der vier Tangenten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks stets auf den Seiten seines Nebendreiecks liegen.

26) Eine Parabel par in erster Hauptlage geht durch den Punkt C(4/8).

a) Stelle eine Gleichung von par auf!

b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte B und C von par mit der durch die Punkte (–9/4) und (21/–20) verlaufende Gerade g!

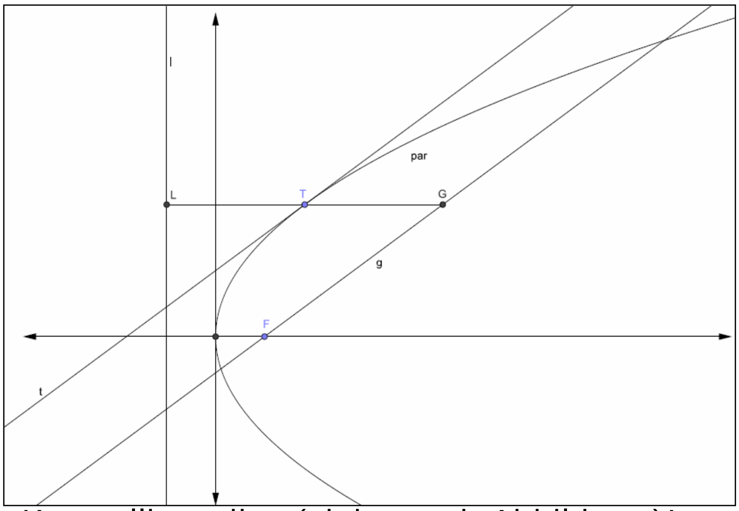
c) Die Tangenten an par in A, B und C bilden via $t_A\cap t_B=\{C'\}$, $t_B\cap t_C=\{A'\}$ sowie $t_A\cap t_C=\{B'\}$ ein Tangentendreieck ΔA´B´C´. Zeige, dass die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ einander im sogenannten NAGELschen Punkt schneiden!

27) Legt man in zwei Punkten A und B einer Parabel in erster Hauptlage sowohl die Tangenten als auch die Normalen, bezeichnet C bzw. D den Schnittpunkt der Normalen bzw. Tangenten sowie E den Mittelpunkt der Strecke CD, dann gilt die Formel $x_E = x_F + \frac{x_A+x_B}{2} + x_D$, wobei F den Parabelbrennpunkt bezeichnet. Verfifiziere dies anhand der Punkte $A(9/12)$ und $B(x_B/-4)$!

28) $P(27/18)$ liegt auf einer Parabel par in erster Hauptlage. Spiegle den Scheitel von par an ihrem Brennpunkt und anschließend den Brennpunkt am gespiegelten Punkt, du erhältst den Punkt Q.

Rechne nach, dass die Gerade g_{PQ} par im zweiten gemeinsamen Punkt N rechtwinklig schneidet.

29) Auf der Parabel $y^2 = 48x$ liegt der Punkt $T(x_T|36)$.



a) Stelle in T eine Gleichung der Parabeltangente t auf!

b) Stelle eine Gleichung der Parallelen g zu t durch den Parabelbrennpunkt F auf!

c) Ist L die Normalprojektion von T auf die Leitgerade l der Parabel, dann ist T der Mittelpunkt der Strecke LG. Kontrolliere dies (siehe auch Abbildung)!

d) Lautet die Parabelgleichung allgemein $y^2=2px$, so liegt G stets auf einer zweiten Parabel mit der Gleichung $y^2=p(x-\frac{1}{2}\cdot p)$. Kontrolliere auch dies!

30) Auf der Parabel $y^2 = 144x$ liegt der Punkt $T(x_T|108)$.

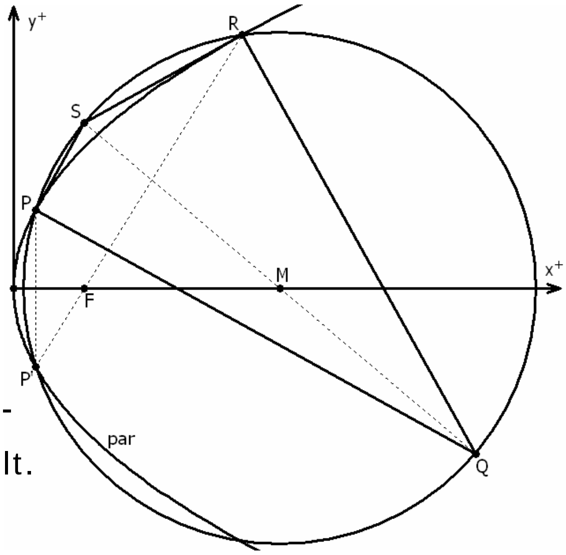
a) Stelle in T eine Gleichung der Parabeltangente t auf!

b) Verbinde T mit dem Parabelbrennpunkt F und ermittle die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts R des entstehenden Brennstrahls mit der Parabel.

c) Lege durch R eine Parallele g zu t und berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts S von g mit der Parabel.

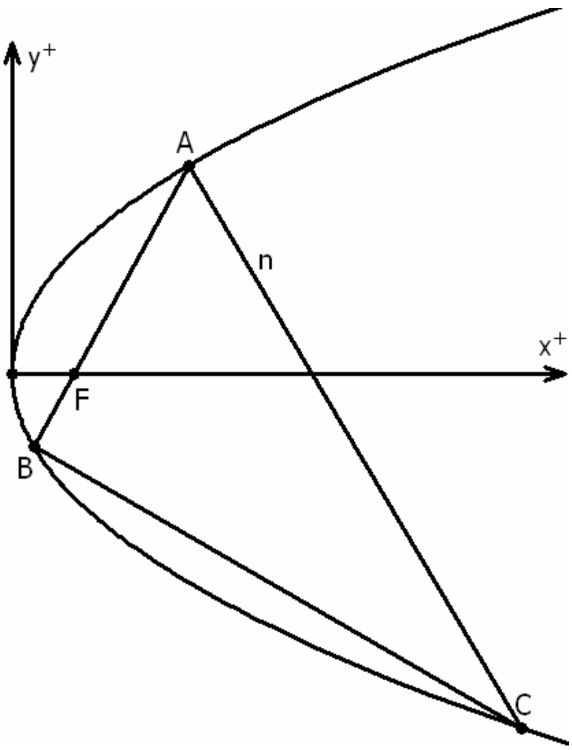
d) Bestätige am konkreten Beispiel die Gültigkeit der Formel $\mu = \frac{|y_T - y_R|^3}{4x_F}$ für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔRST!

31) P’ und R seien Punkte einer Parabel par, auf deren Verbindungsstrecke auch der Brennpunkt F von par liegt. Verifiziere am konkreten Beispiel einer Parabel in erster Hauptlage durch P’(2|–16), dass dann die Tangenten und Normalen an par in P und R ein Sehnenviereck PQRS bilden, dessen Umkreismittelpunkt auf der Parabelachse liegt und für dessen Umkreisradius r die Formel $r = y_S \cdot \sqrt{\left(\frac{y_S}{2y_F}\right)^2 + 1}$ gilt.



32) In zwei Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(x_F|0)$ werden die Tangenten t_A und t_B an par gelegt, welche einander im Punkt $S(x_S|y_S)$ schneiden. Verifiziere am konkreten Beispiel F(12|0), $A(x_A|-12)$ und $B(x_B|36)$ die schöne Formel $A = \frac{|(x_F + x_S)\cdot(y_B - y_A)|}{2}$ für den Flächeninhalt A des Dreiecks ΔFAB.

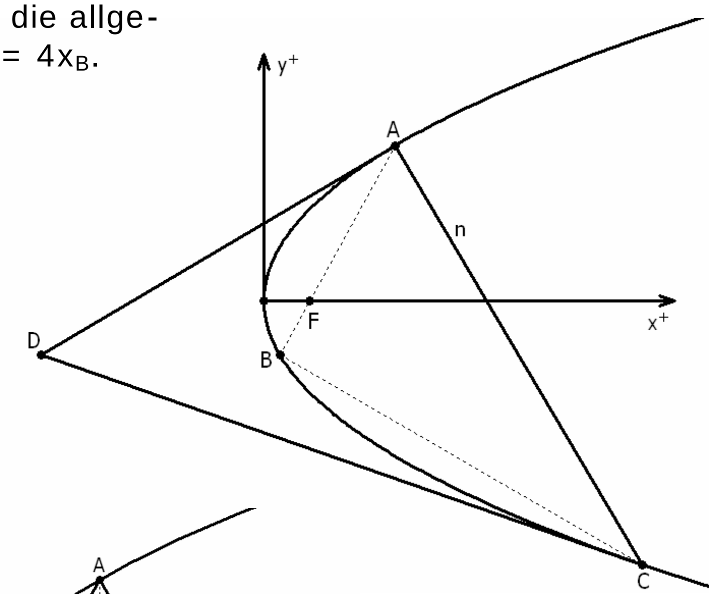
33) Nebenstehend abgebildete Parabel mit dem Brennpunkt F(16|0) zusammen mit der Kurvennormalen n im Kurvenpunkt A(x_A|128) erzeugt ein Dreieck ΔABC. Kontrolliere am konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$.



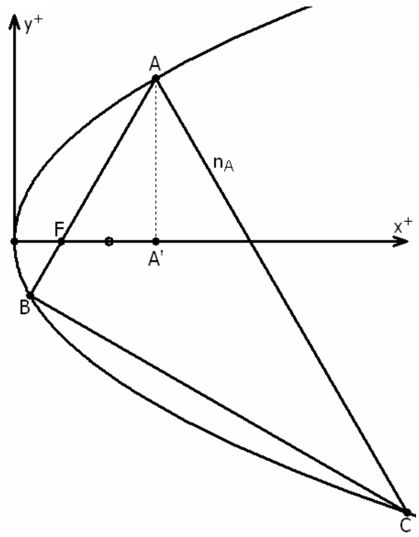
Die rechts unten abgebildete Parabel mit dem Brennpunkt F(4|0) zusammen mit der Kurvennormalen n im Kurvenpunkt A(x_A|32) sowie den Tangenten in den Kurvenpunkten A und C erzeugt ein Dreieck ΔACD.

34) Kontrolliere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Sachverhalt, dass das Dreieck ΔACD einen doppelt so großen Flächeninhalt hat als das Dreieck ΔABC.

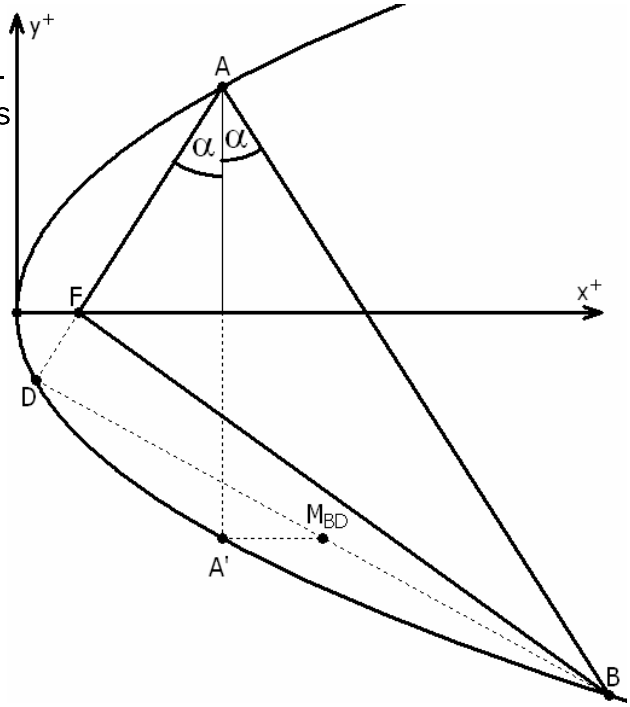
35) Kontrolliere am konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $x_A + x_C + 2x_D = 4x_B$.



36) Rechts unten ist eine Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F abgebildet, A' entsteht durch fortlaufende Spiegelung des Parabelscheitels an F, A ist der über A' liegende Parabelpunkt. Verifiziere am Beispiel F(3|0), dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig in B ist.



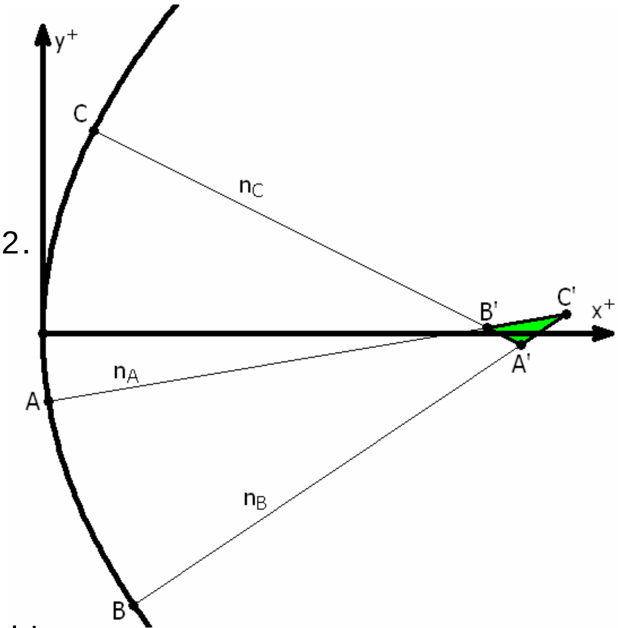
37) Nebenstehend ist eine Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F abgebildet, A' entsteht durch Spiegelung des Parabelpunkts A an der Parabelachse. Verifiziere am Beispiel A(256|128), dass die Strecke $A'M_{BD}$ parallel zur Parabelachse verläuft.



38) Legt man in drei Punkten A, B und C einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F die Normalen an die Parabel, so begrenzen die drei Normalen ein Dreieck ΔA'B'C', für dessen Flächeninhalt A die Formel

$$A = \frac{1}{64x_F^3} \cdot |(y_A - y_B)(y_B - y_C)(y_C - y_A)|(y_A + y_B + y_C)^2$$

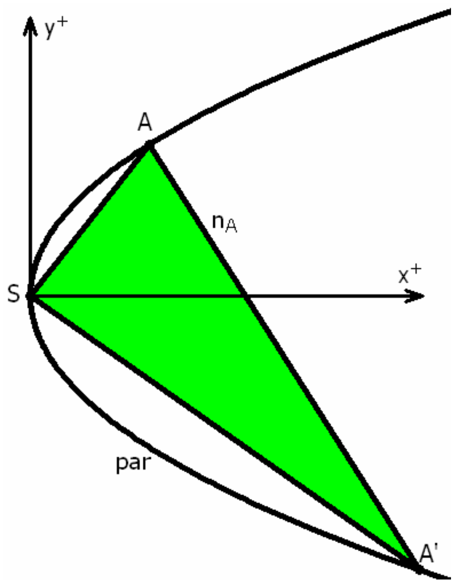
Zeige, dass A(3|–36), B(48|–144) und C(27|108) auf einer Parabel in erster Hauptlage liegen und kontrolliere $A = 252$.



39) Legt man in einem Punkt A einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F die Normale n_A an die Parabel, so begrenzen A, der zweite gemeinsame Punkt A' von n_A und par sowie der Scheitel S der Parabel ein Dreieck ΔSA'A, für dessen Flächeninhalt A die Formel

$$A = \frac{y_A}{8x_F} \cdot |y_{A'}(y_{A'} - y_A)|$$

gilt. Verifiziere diese Formel am konkreten Beispiel A(1|4) [check: $A = 180$]!



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juli 2011. Dr. Robert Resel, e. h.