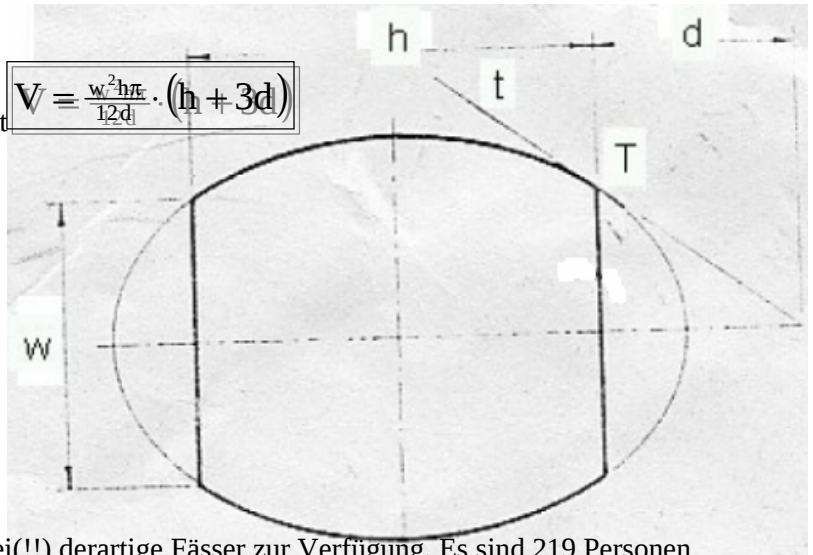


§2. Kubatur (Aufgaben 55 bis 108)

- 55) Rotiert ein Bogen einer gleichseitigen Hyperbel (wobei der Anfangspunkt ein Scheitel ist) um die Hauptachse von hyp, so entsteht (analog zur Kugelkalotte) eine Hyperboloidkalotte der Höhe h mit dem Basiskreisradius r.
- Wähle a) oder b)!
- Leite die Volumensformel $V = \frac{\pi h}{6} \cdot (3r^2 - h^2)$ für die Hyperboloidkalotte her!
 - Verifiziere die Formel für jene konkrete gleichseitige Hyperbel hyp in erster Hauptlage, welche durch den Punkt P(39|36) verläuft, wobei P bei Rotation von hyp um die Hauptachse den Basiskreis der Kalotte erzeugt.
- 56) **Verallgemeinerung von Aufgabe 55):**
 Rotiert ein Bogen einer gleichseitigen Hyperbel (welcher den Scheitel **nicht** enthält) um die Hauptachse von hyp, so entsteht eine Zone von einem Teil eines zweischaligen Drehhyperboloids der Höhe h mit dem Basiskreisradius r und dem Deckkreisradius R. Für das Volumen dieser Zone gilt dann (die nicht mehr so einfach wie jene in der letzten Aufgabe herzuleitende) Volumensformel $V = \frac{\pi h}{6} \cdot (3R^2 + 3r^2 - h^2)$.
- Erkläre, wie die Volumensformel aus der letzten Aufgabe nun ganz einfach aus jener für die Zone folgt!
 - Verifiziere die Volumensformel für die Zone anhand jener gleichseitigen Hyperbel hyp in erster Hauptlage, welche durch den Punkt P(16|11) verläuft, wobei P bei Rotation von hyp um die Hauptachse im Intervall [12;24] entsteht.
- 57) Die Hyperbel hyp [hyp.: $xy = 32$] begrenzt mit der Ellipse ell [ell.: $4x^2 + y^2 = 272$] im ersten Quadranten ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt. Berechne das Volumen des Körpers!
- 58) Die Hyperbel hyp [hyp.: $xy = 32$] begrenzt mit der Ellipse ell [ell.: $x^2 + 16y^2 = 320$] im ersten Quadranten ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt. Berechne das Volumen des Körpers!
- 59) a) Wie viele Punkte haben die Ellipse ell [ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$] und die Parabel par [par.: $y = b - \frac{b}{2a^2} \cdot x^2$] gemeinsam? Ermittle die entsprechenden Koordinaten und gib ggf. die **Art der Berührung** an!
- b) Rotiert das von ell und der x-Achse bzw. das von par und der x-Achse begrenzte Segment um die y-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. In welchem Verhältnis stehen derer Volumina?
- 60) Eine Ellipse ell in erster Hauptlage (halbe Hauptachsenlänge a, halbe Nebenachsenlänge b, Brennweite e) wird um 90° um den Ursprung gedreht, wodurch eine zu ell kongruente Ellipse ell' entsteht, die mit ell ein Flächenstück begrenzt, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt, für dessen Volumen V die Formel $V = \frac{4ab\pi}{3} \cdot \left(a - \frac{e^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ hergeleitet werden kann.
- Wähle nun a) oder b)!
- Beweise diese exotische Volumensformel!
 - Verifiziere sie für die konkrete Ellipse ell [ell.: $9x^2 + 16y^2 = 3600$]!
 - Obligatorisch [egal, ob zuvor a) oder b) gewählt]: Was passiert mit der Formel für $e=0$? Interpretiere geometrisch!
- 61) Durch einen im ersten Quadranten liegenden Punkt P(a|b) wird der Graph Γ_f einer Polynomfunktionen zweiten Grades gelegt, welcher sowohl die x-Achse als auch die durch P gehende Parabel par in erster Hauptlage in P berührt. Beweise [oder verifiziere für P(10|10)], dass der Drehkörper, der bei Rotation des von der x-Achse, par und Γ_f begrenzten Flächenstück um die x-Achse entsteht, exakt $\frac{3\pi ab^2}{10}$ beträgt.

- 62) Nebenstehende Skizze zeigt den Längsschnitt eines Fasses mit elliptischen Dauben. Wähle a) oder b), wobei bei der Wahl von b) zusätzlich c) und d) zu bearbeiten sind:

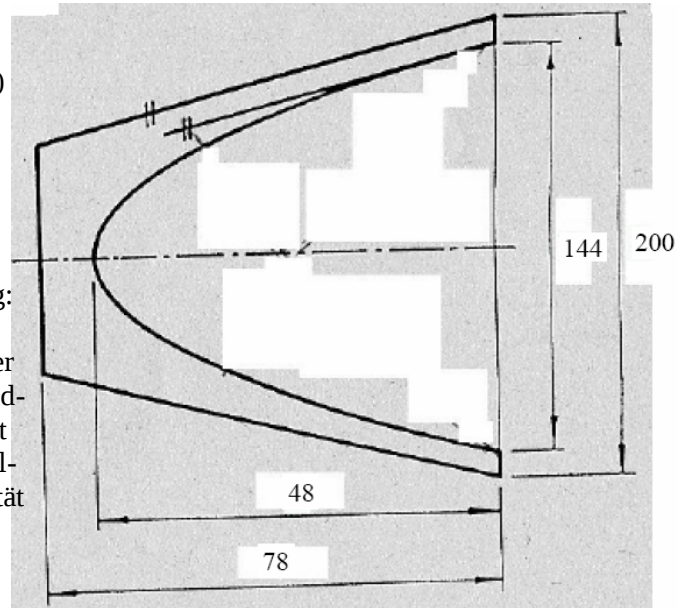
$$V = \frac{w^2 h \pi}{12 d} \cdot (h + 3d)$$



- a) Beweise **nebenstehende Formel** für das Volumen von diesem Fass!
- b) Verifiziere die Formel für die speziellen Werte $h=160\text{cm}$, $w=72\text{cm}$ und $d=45\text{cm}$.
- c) Gib den Durchmesser des Fasses (klarerweise an der breitesten Stelle!) an!

- d) Utopie(!): Bei der Maturafeier stehen zwei(!) derartige Fässer zur Verfügung. Es sind 219 Personen anwesend. Wie viel Liter könnte(!!) theoretisch jeder trinken, wenn man gerecht aufteilt?

- 63) Einer gleichseitigen Hyperboloidkalotte (Radius r , Höhe h) wird ein coaxialer Drehkegel mit identischem Basiskreis und gleicher Höhe eingeschrieben. Beweise, dass dieser Kegel stets mehr als $\frac{2}{3}$ der Hyperboloidkalotte einnimmt.



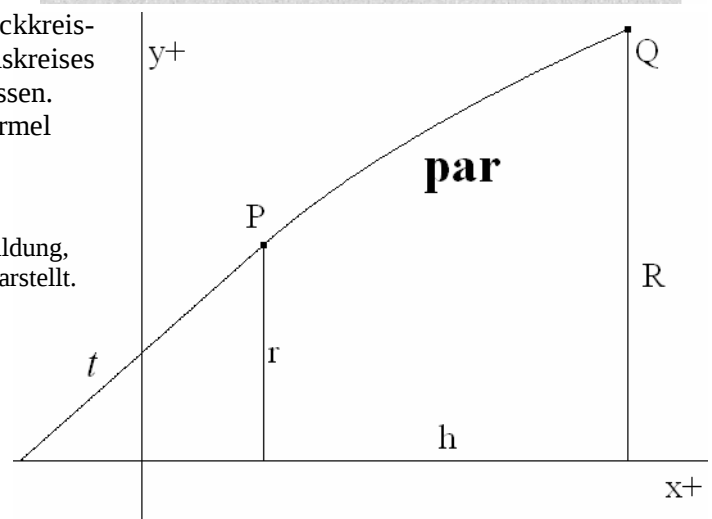
- 64) Ein (in der angegebenen Skizze – Maße in mm, Achtung: Skizze nicht maßstabsgetreu! – auf die Seite gekipptes) Glasgefäß hat die Form eines Drehkegelstumpfs, welcher wie in der Skizze angegeben durch eine Drehhyperboloidkalotte ausgehöhlt wurde, wobei der Achsenschnittpunkt der erzeugenden Hyperbel mit dem Basiskreis des Kegelstumpfs zusammenfällt und die eingezeichnete Parallelität zu beachten ist. Wie viel cl fasst dieses Gefäß?

- 65) Eine Drehparaboloidscheibe (Höhe h , Basis- bzw. Deckkreisradius r bzw. R , wobei $R > r$) wird unterhalb ihres Basiskreises von einem coaxialen Drehkegel berührend abgeschlossen. Dann gilt für das Volumen des Gesamtkörpers die Formel

$$V = \frac{\pi h}{6} \cdot \frac{3R^4 + r^4}{R^2 - r^2}$$

Wähle a) oder b). Be(tr)achte in jedem Fall die rechte Abbildung, welche einen Achsenschnitt des oben genannten Körpers darstellt.

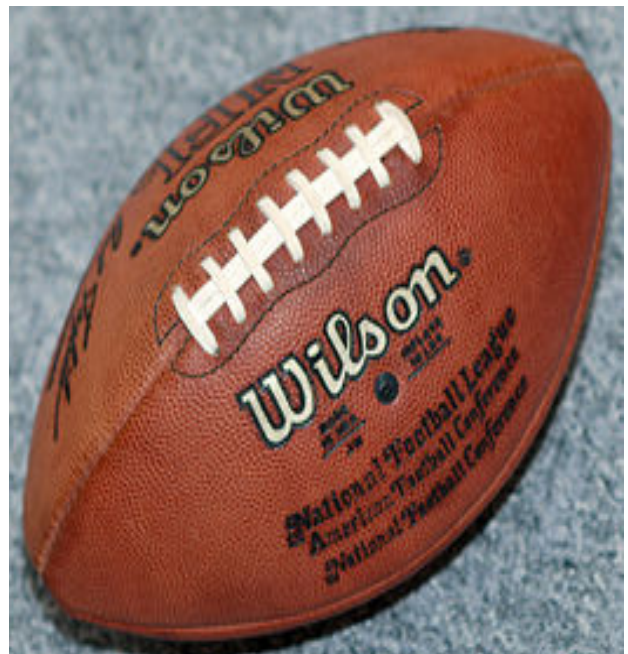
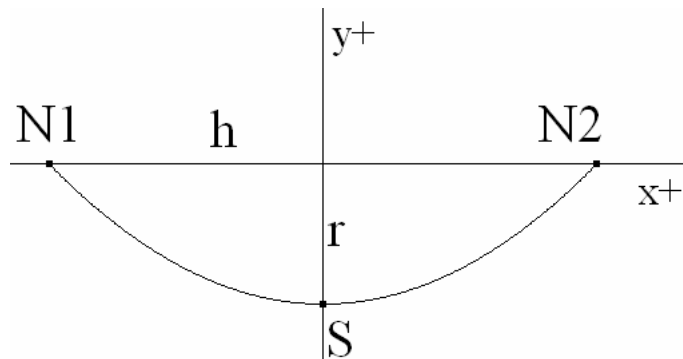
- a) Beweise diese Formel!
- b) Verifiziere sie für $P(3|24)$ und $Q(x_Q|48)$!



- 66) Ein **American Football** entstehe, indem man den von der

Parabel par $\left[\text{par.: } y = \frac{r}{h^2} \cdot (4x^2 - h^2) \right]$ und der x-Achse begrenzten Bereich um die x-Achse rotieren lässt.

- a) Zeige zunächst, dass obige Parabel tatsächlich die in der unteren Skizze illustrierten **Voraussetzungen** erfüllt. Verbalisiere **selbige**, bevor du sie nachweist!



- b) Leite auf Grundlage des obigen mathematischen Modells die Formel für das Volumen von einem derartigen **Football** her!

- 67) Eine Drehparaboloidkalotte und eine Drehhyperboloidkalotte (von einer gleichseitigen Hyperbel erzeugt) haben gleichen Radius r und gleiche Höhe h, mit V_P bzw. V_H seien deren Volumina bezeichnet.

- a) Beweise, dass stets $V_P > V_H$ gilt!
b) Berechne das Verhältnis r:h, wenn $V_P : V_H = 16 : 13$ gilt!

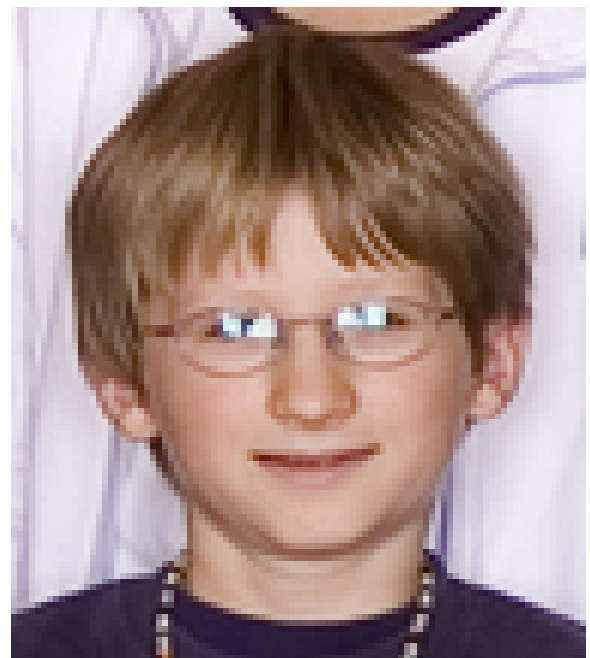
- 68) **SATZ.** Schreibt man einer Hyperboloidkalotte (halbe Hauptachsenlänge a der erzeugenden Hyperbel, Höhe h) jenen coaxialen Kegel mit identischem Basiskreis und gleicher Höhe ein, so verhalten sich die beiden Volumina wie $(3a+h):(2a+h)$.

Überprüfe diesen Satz für $h=4$ anhand der Hyperbel mit der Gleichung $9x^2 - 16y^2 = 324$.

- 69) Dave berichtet beim 40-jährigen Maturatreffen (vgl. Abbildung rechts!) stolz, das ganz große Geld gemacht zu haben (Immerhin lädt er die ganze Klasse samt aller zur Verfügung stehenden Lehrer zu einer geschlossenen Gesellschaft in die *Creperie* ein! ☺), und zwar (indirekt!) mit Mathematik. Unser werter "Diagonal-Dave" hat sich nämlich auf die Produktion von Footballs spezialisiert, welche nicht wie jene in Aufgabe 66) als Meridianschnitte doppelte Parabelsegmente aufweisen, sondern (translatierte) Potenzkurven höherer Ordnung als Profile aufweisen, die technischen Details folgen nun anbei: Der "DSF" (steht nicht fürs deutsche Sprotferssehen, sondern für Daves Spezial-Football) entsteht, indem die Quartik mit der Gleichung

$$y = \frac{8d}{h^4} \cdot \left(\frac{h^4}{16} - x^4 \right) \text{ im Intervall } \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right] \text{ um die x-Achse rotiert.}$$

- a) Beweise zunächst, dass diese Quartik überhaupt einen Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d erzeugt!
b) Beweise, dass der DSF ein um ein Drittel größeres Volumen aufweist als das Standardmodell, welches durch Rotation der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2d}{h^2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right)$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right]$ um die x-Achse entsteht.

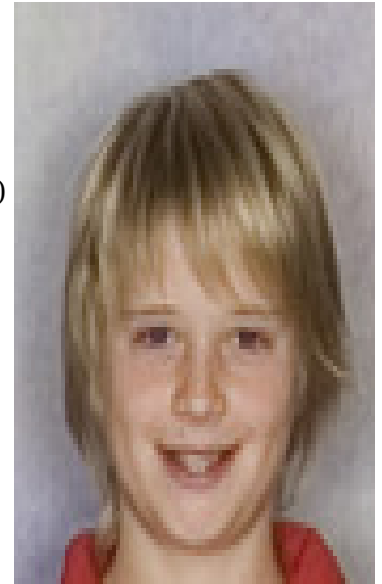


70) (Inhaltliche) Fortsetzung von Aufgabe 69):

Zu Beginn von Daves "Footballkarriere" war Ritzi seine rechte Hand, ergo: stellvertretender Generaldirektor! Dann begann er, durch Fälschen von Daves Büchern auf eigene Faust (vermeintlich!) noch bessere Footballtypen zu produzieren, und zwar unter Verwendung einer Sixtik anstelle von Daves Quartik, Details folgen nun anbei: Der "MUFFI" (Moritz ultra-feiner Football intelligent!)

entsteht, indem die Sixtik mit der Gleichung $y = \frac{32d}{h^6} \cdot \left(\frac{h^6}{64} - x^6 \right)$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right]$ um die x-Achse rotiert.

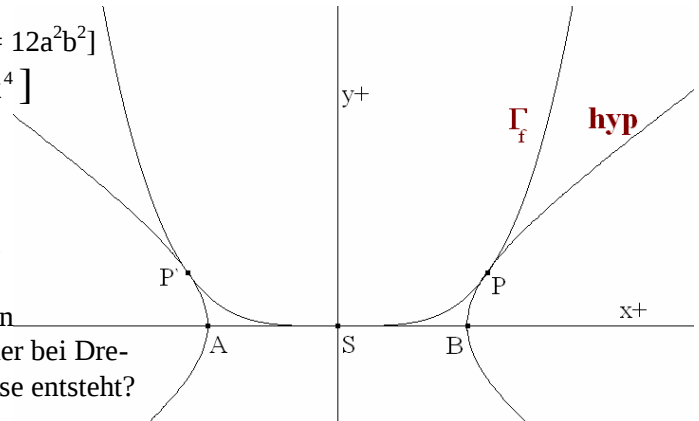
- Beweise zunächst, dass diese Sixtik überhaupt einen Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d erzeugt!
- Beweise, dass der MUFFI ein um fast die Hälfte größeres Volumen aufweist als das Standardmodell, welches durch Rotation der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2d}{h^2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right)$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right]$ um die x-Achse entsteht.
- Quantifiziere "ein um fast die Hälfte größeres Volumen"!



71) Die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 8x$ rotiert im Intervall $[0; 4]$ (Einheit cm) um die x-Achse, wodurch eine 4cm hohe Paraboloidkalotte entsteht, welche randvoll mit Wasser gefüllt wird. Wie hoch steht das Wasser, wenn es in jenen Teil eines zweischaligen Drehhyperboloids umgeschüttet wird, welcher durch Rotation des rechten Astes der Hyperbel mit der Gleichung $3x^2 - 4y^2 = 48$ um die x-Achse entsteht? Welches erstaunliche Ergebnis erhält man? Läßt es sich für beliebige Wassermengen (oder andere Flüssigkeiten) verallgemeinern? Beweis oder Gegenbeispiel!

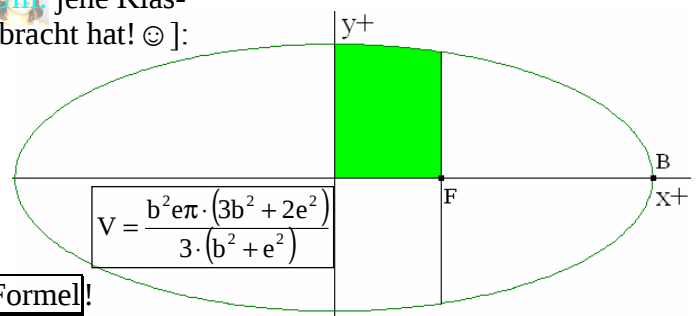
72) Beweise: Schreibt man einem Drehparaboloid Γ einen Drehkegel Φ um, der Γ längs seines Basiskreises berührt, dann verhalten sich die Volumina von Drehkegel und Drehparaboloid wie 4 : 3.

- Beweise, dass die Hyperbel hyp [hyp: $4b^2x^2 - a^2y^2 = 12a^2b^2$] und der Graph Γ_f der Funktion $f \left[y = f(x) = \frac{b}{8a^4} \cdot x^4 \right]$ einander im [nebst $S(0|0)$] zweiten Schnittpunkt P von Γ_f mit der steigenden Asymptote der Hyperbel hyp [hyp: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$] berühren.
- Rotiert der Hyperbelbogen BP bzw. AP' (siehe Abbildung rechts) um die y-Achse so entsteht eine Zone eines einschaligen Drehhyperboloids. Welchen Bruchteil davon nimmt jener Rotationskörper ein, der bei Drehung des Bogens SP bzw. SP' von Γ_f um die y-Achse entsteht?

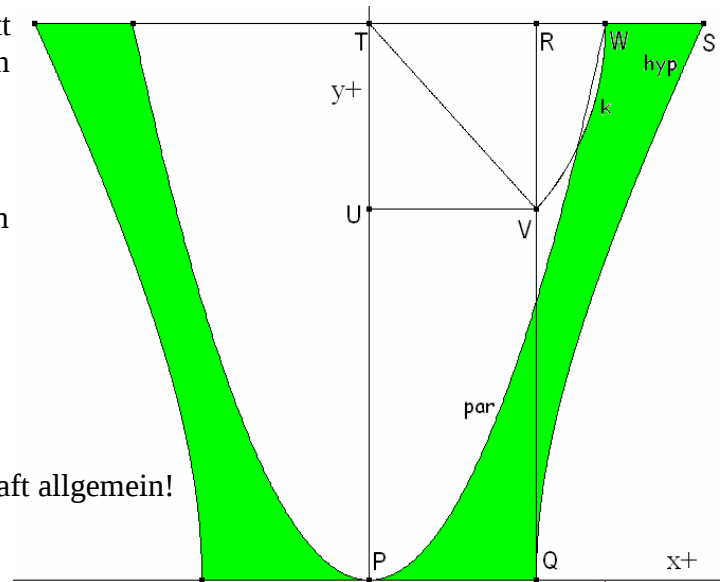


Aus der dreistündigen Schularbeit der 8D (2009/10) [[@Ulli](#): jene Klasse, die ihr letztes Schuljahr in der Schulwartwohnung verbracht hat! ☺]:

74) Von einer Ellipse ell in erster Hauptlage kennt man den rechtsseitigen Brennpunkt $F(3|0)$ sowie den rechtsseitigen Hauptscheitel $B(9|0)$. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Zone eines eiförmigen Drehellipsoids. Verifiziere für deren Volumen V die nebenstehende Formel!

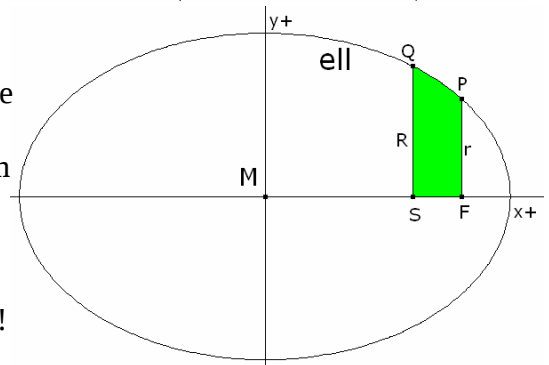


- 75) In nebenstehender Abbildung ist der Meridianschnitt jenes Drehkörpers illustriert, welcher durch Rotation des gefärbten Bereichs um die y-Achse entsteht. Dabei befindet sich hyp in erster Hauptlage, par in zweiter Hauptlage (par.: $y=ax^2$) und es gilt $\overline{TS} = 2 \cdot \overline{PQ}$. Die Länge von TW ergibt sich aus dem Quadrat UVRT, wobei k ein Achtelkreisbogen ist. Wähle a) oder/und(!) b):

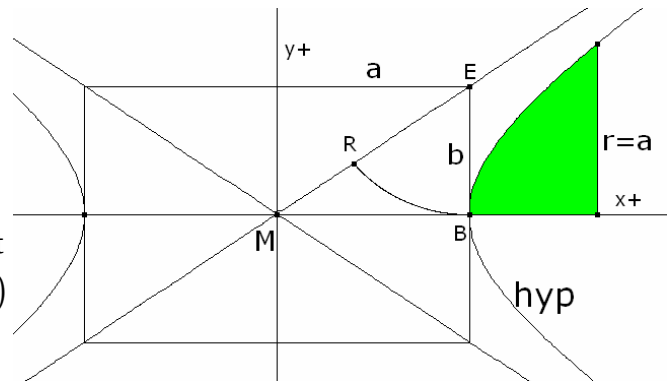


- a) Verifiziere am konkreten Beispiel $\overline{PQ} = 5$, dass das Volumen der paraboloidförmigen Aushöhlung halb so groß ist das Hyperboloidvolumen.
b) Beweise die in a) lediglich verifizierte Eigenschaft allgemein!

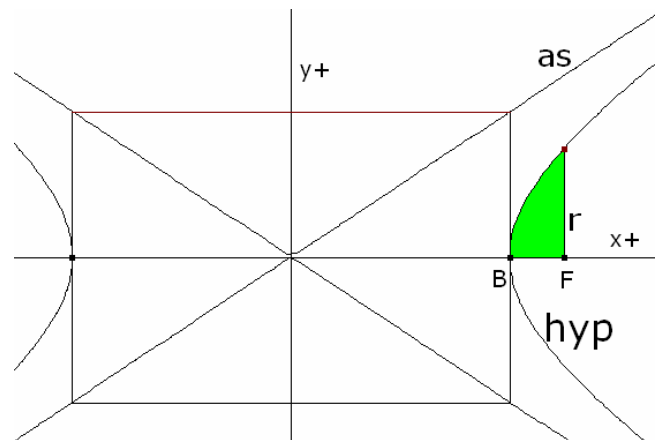
- 76) In nebenstehender Abbildung gilt $\overline{MS} = b$, F ist der rechtsseitige Brennpunkt von ell. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehellipsoidzone der Höhe h mit dem Basiskreisradius r und dem Deckkreisradius R. Verifiziere anhand der konkreten Ellipse mit dem Hauptscheitel B(25|0) und dem rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) die allgemeingültige Volumensformel $V = \frac{h\pi}{3} \cdot (2b^2 - rR)$ für das Volumen dieser Zone!



- 77) In nebenstehender Abbildung ist RB ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt E. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehhyperboloidkalotte der Höhe h mit dem Basiskreisradius $r=a$. Verifiziere anhand der konkreten Hyperbel mit dem Hauptscheitel B(12|0) und dem rechtsseitigen Brennpunkt F(15|0) die allgemeingültige Formel $V = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{MR}^2 \cdot (h + 3r)$ für das Volumen V dieser Drehhyperboloidkalotte!



- 78) In nebenstehender Abbildung ist F der rechtsseitige Brennpunkt von hyp. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehhyperboloidkalotte der Höhe h mit dem Basiskreisradius r. Verifiziere anhand der konkreten Hyperbel mit der Asymptotengleichung as : $4y = 3x$ sowie dem rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) die allgemeingültige Formel $V = \frac{h^2\pi}{3} \cdot (3r - k^2h)$ für das Volumen V dieser Drehhyperboloidkalotte, worin k die Steigung von as bezeichnet.

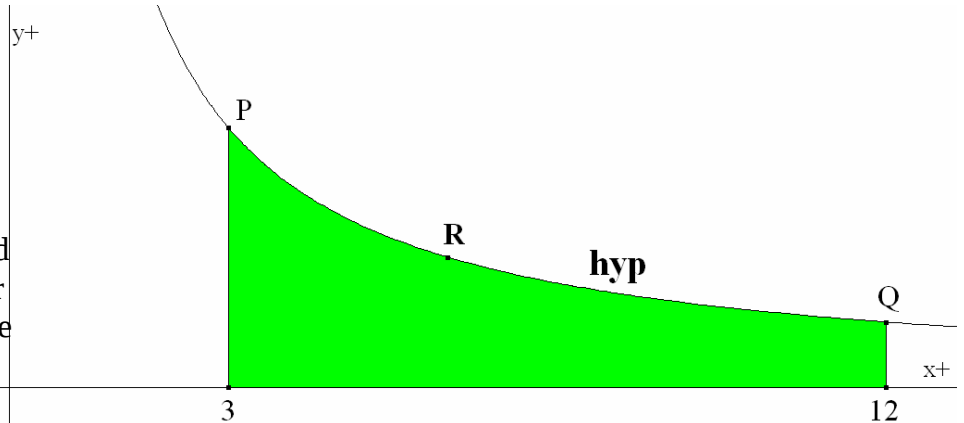


Zum Entspannen für zwischendurch die Aufgaben 79) und 80) aus den ersten Schularbeiten der 8B und 8C vom November 2009 [mit weiteren Anwendungen der Integralrechnung, deshalb im Bereich Volumina einfache(re) Aufgaben (als bei euch)]

↓↓↓↓

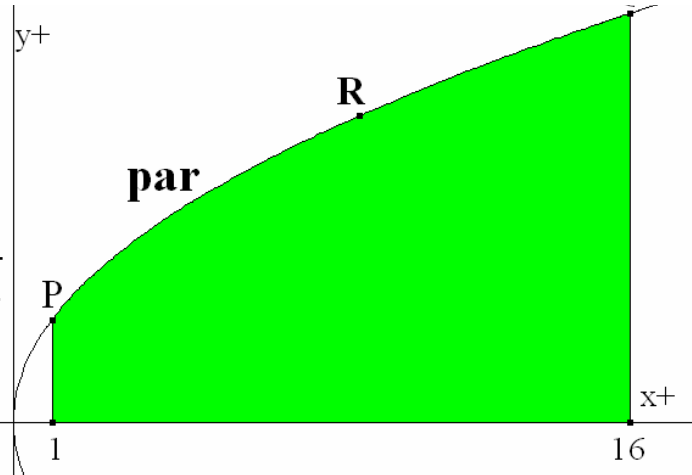
Wird aber auch nicht so schlimm! ☺

- 79) Rotiert ein Bogen PQ einer gleichseitigen Hyperbel hyp um eine ihrer Asymptoten, so entsteht ein hornförmiger Drehkörper der Höhe h mit dem Basiskreisradius r_1 und dem Deckkreisradius r_2 , für dessen Volumen V dann die Formel $V = r_1 \cdot r_2 \cdot h \cdot \pi$ gilt.



Verifiziere diese Volumensformel für obig skizzierte gleichseitige Hyperbel hyp, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind, wobei hyp durch R(6|4) verläuft, und zwar für den angegebenen Bogen PQ, wenn dieser um die x-Achse gedreht wird. (Der halbe Längsschnitt ist der Raumvorstellung wegen auch schon gefärbt eingezeichnet!)

- 80) Rotiert ein Bogen PQ einer Parabel um ihre Achse, so entsteht eine Zone eines Drehparaboloids der Höhe h mit dem Basiskreisradius r_1 und dem Deckkreisradius r_2 , für dessen Volumen V dann die Formel $V = \frac{h\pi}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2)$ gilt.



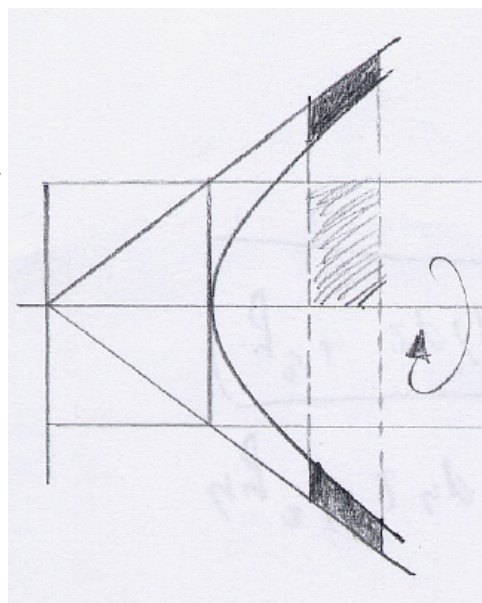
Verifiziere diese Volumensformel für die in Abbildung 2 skizzierte Parabel par, welche sich in erster Hauptlage befindet und durch R(9|18) geht, und zwar für den angegebenen Bogen PQ (Der halbe Längsschnitt ist der Raumvorstellung wegen auch schon gefärbt eingezeichnet!)

Zurück zu "Handfesterem":

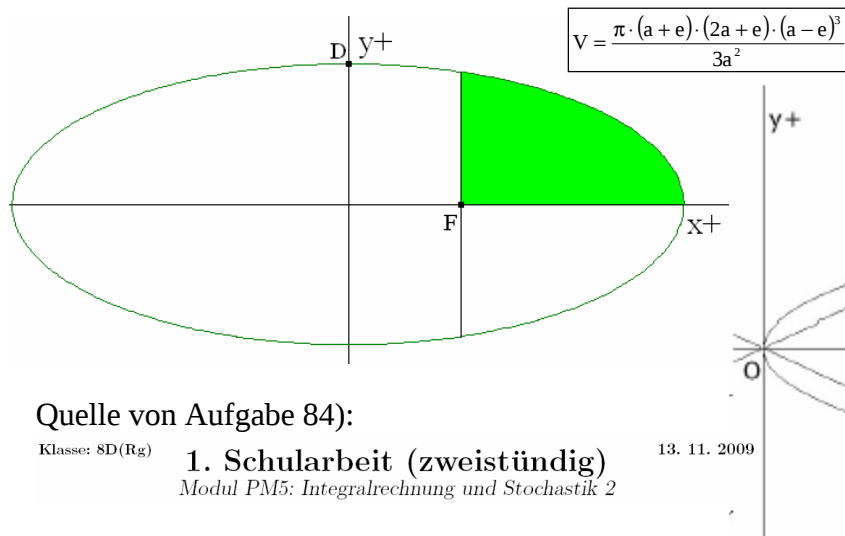
- 81) Rotiert eine Hyperbel "oberhalb" ihrer Hauptachse um ihre Nebenachse, so entsteht ein nach oben unbegrenztes einschaliges Drehhyperboloid. Diesem soll nun eine koaxiale Drehparaboloidkalotte einbeschrieben werden, welche sowohl den Boden als auch die Wand (längs des Deckkreises k des Paraboloidkalotte) des Hyperboloids berührt. Die Trägerebene von k einerseits und jene des Kehlkreises vom Hyperboloid andererseits schneidet dann aus dem Hyperboloid einen endlichen Teilkörper heraus. Beweise nun:
- Die gemeinsame Höhe des Hyperboloids und des Paraboloids entspricht der halben Nebenachsenlänge der erzeugenden Hyperbel.
 - Der Flächeninhalt des Deckkreises ist doppelt so groß als jener des Basiskreises (Kehlkreises).
 - Das Paraboloid nimmt exakt $\frac{3}{4}$ des Hyperboloids ein.
 - Betrachtet man den Achsenschnitt dieser Konfiguration, so erzeugt der Abschnitt einer der beiden gemeinsamen Tangenten der Hyperbel und der Parabel vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit der Symmetrieachse s der Figur bei Rotation um s einen Drehkegel, dessen Volumen exakt jenem des Hyperboloids entspricht.
 - Ist die Hyperbel gleichseitig, dann gleicht das Hyperboloidvolumen dem Rauminhalt jener Kugel, welche als Durchmesser die (Haupt-)Achsenlänge der gleichseitigen Hyperbel besitzt.

82) In nebenstehender Abbildung sind ein Ast einer Hyperbel hyp samt beider Asymptoten sowie zwei zur Hauptachse symmetrische Bereiche illustriert. Es ist zu

beweisen, dass der bei Rotation dieser Bereiche um die Hauptachse von hyp entstehende ringähnliche Drehkörper jenem Zylinder volumsgleich ist, welcher bei Rotation des schraffierten Rechtecks um die Hauptachse von hyp entsteht.



83) Von einer Ellipse ell in erster Hauptlage kennt man den rechtsseitigen Brennpunkt $F(20|0)$ sowie den oberen Nebenscheitel $D(0|15)$. Rotiert der markierte Bereich um die x -Achse, so entsteht eine eiförmige Drehellipsoidkalotte. Verifiziere für deren Volumen V die nebenstehende Formel!

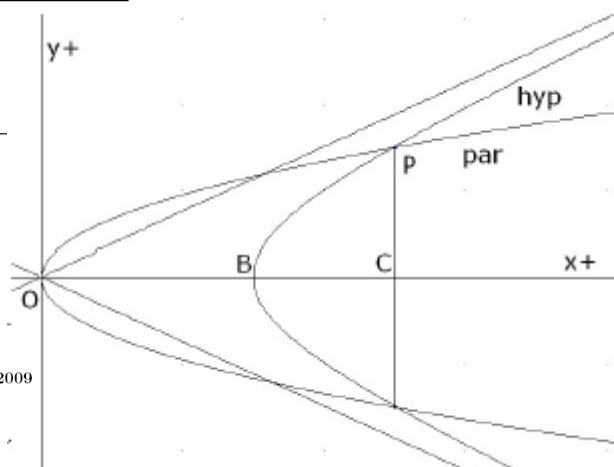


Quelle von Aufgabe 84):

Klasse: 8D(Rg)

1. Schularbeit (zweistündig)
Modul PM5: Integralrechnung und Stochastik 2

13. 11. 2009



84) Rotiert ein Bogen BP einer Hyperbel hyp (wobei B ein Hyperbelscheitel ist und $P(z|y_P)$ gilt) in erster Hauptlage mit der halben Hauptachsenlänge a um die Hauptachse von hyp, so entsteht eine Hyperboloidkalotte.

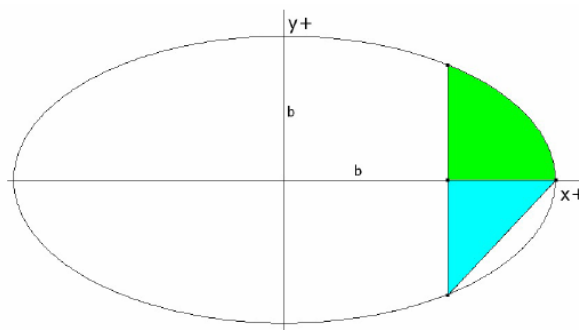
Rotiert hingegen der entsprechende Bogen OP einer Parabel par in erster Hauptlage um die Parabelachse, so entsteht eine Paraboloidkalotte (siehe Abbildung rechts oben!).

Bezeichnet V_H bzw. V_P das Volumen der Hyperboloid- bzw. Paraboloidkalotte, so gilt stets

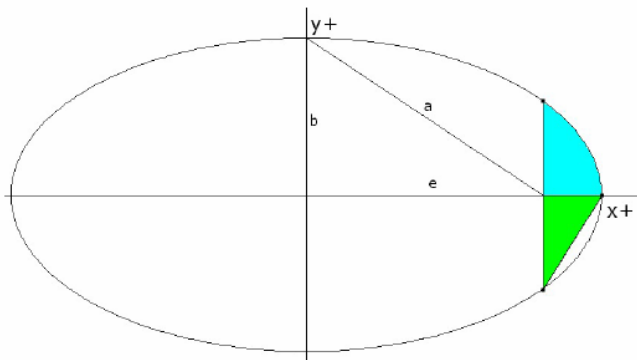
$$\frac{V_H}{V_P} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(z - a)(z + 2a)}{z(z + a)}.$$

Überprüfe dies für hyp [hyp.: $9x^2 - 16y^2 = 2025$] und par [par.: $y^2 = 9x$]

(Nimm notwendigenfalls vom richtigen Schnittpunkt $P(25|15)$ der beiden Kurven Gebrauch, welcher aber für eine vollständige Lösung selbständig zu ermitteln ist!)



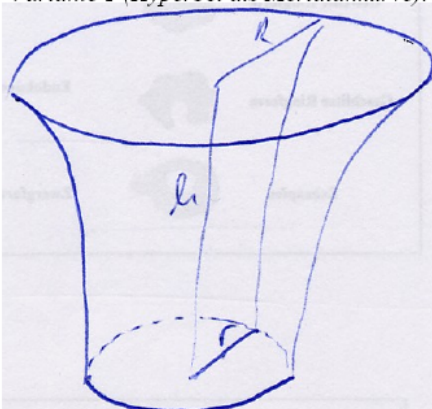
85) Rotieren die in obiger Abbildung markierten Gebiete um die x -Achse, so entsteht eine Ellipsoidkappe bzw. ein Drehkegel. Zeige, dass die Volumina sich wie $a + b$ zu $2a + b$ verhalten (optional: Beweis oder Verifikation für die konkrete Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 25y^2 = 5625$).



- 86) Rotieren die in obiger Abbildung markierten Gebiete um die x -Achse, so entsteht eine Ellipsoidkappe bzw. ein Drehkegel. Zeige, dass die Volumina sich wie $a + e$ zu $2a + e$ verhalten (optional: Beweis oder Verifikation für die konkrete Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 25y^2 = 5625$).

- 87) Die Meridiankurve einer rotationssymmetrischen Vase (Drehachse: y -Achse) geht durch die Punkte $P(r|0)$ und $Q(R|h)$, wobei $R > r$ (siehe Skizze!) gilt. Ziel dieser Aufgabe ist der **quantitative Vergleich zweier "Vasenversionen"**, und zwar:

Variante 1 (Hyperbel als Meridiankurve):



Stelle eine Gleichung jener Hyperbel hyp in erster Hauptlage auf, welche durch die Punkte P und Q geht und beweise die neben der Skizze von deinem matheprof(.at) hingekrakelte Volumensformel, indem du hyp für $0 \leq y \leq h$ um die y -Achse rotieren lässt.

$$\text{HYP: } V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Variante 2 (Parabel als Meridiankurve):

Jetzt zum quantitativen Vergleich: Beweise, dass das Volumen der "Hyperbelvase" stets größer ist als jenes der "Parabelvase".

Stelle eine Gleichung jener Parabel

$$V_{\text{par}} = \frac{\pi h}{15} (3R^2 + 4Rr + 8r^2)$$

par mit der x -Achse als Symmetrieachse auf (Ansatz $y^2 = px + q$), welche durch die Punkte P und Q geht und beweise die unmittelbar oberhalb von deinem matheprof(.at) hingekrakelte Volumensformel, indem du nun par für $0 \leq y \leq h$ um die y -Achse rotieren lässt.

Da es nicht unbedingt notwendig ist, diese Aufgabe allgemein zu lösen, soll es auch durchaus genügen, mit den konkreten Zahlenwerten $r=3$, $h=4$ und $R=5$ zu rechnen, wenn es beliebt! ☺ Was den qualitativen Vergleich betrifft, sollte schon mit beiden Varianten gerechnet werden!!

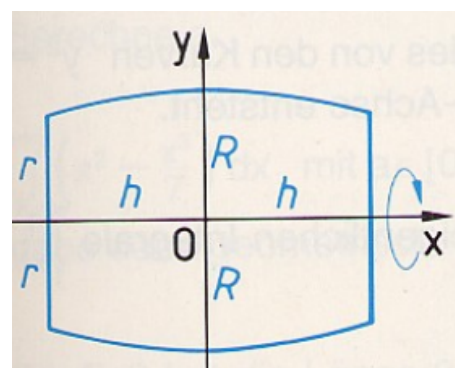
- 88) Über die Mathematik der (Wein-)Fässer ... (Die Maturafeier wartet! ☺)

Für das Volumen V von einem Fass mit parabolischen Dauben (vgl. Abbildung rechts) gilt die

nebenstehende Formel

Beweise diese Formel (Verwende dazu den Ansatz $y = px^2 + q$)

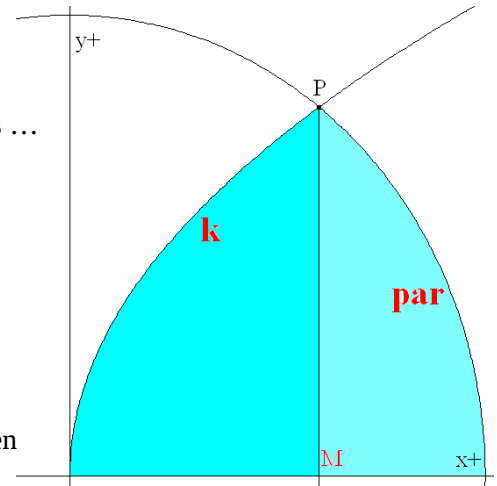
$$V = \frac{2\pi h}{15} \cdot (3r^2 + 4Rr + 8R^2)$$



89) **Mehr** über die Mathematik der (**Wein**-)Fässer ...

Analog zu Aufgabe 88), wobei die parabolischen Dauben nun durch elliptische Dauben zu ersetzen sind und insbesondere zu zeigen ist, dass ...

- für das entsprechende Fassvolumen V die Formel $V = \frac{2\pi h}{3} \cdot (2R^2 + r^2)$ gilt,
- das Fass mit elliptischen Dauben stets einen größeren Rauminhalt aufweist als jenes mit parabolischen Dauben (selbstverständlich bei jeweils gleichen Werten für h , r und R !).



90) Die Parabel par[par: $y^2 = 16x$] und der Kreis k[k: $x^2 + y^2 = 225$] begrenzen (vgl. Abbildung rechts!) ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x -Achse einen Drehkörper erzeugt. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Teilkörper, in welche der Drehkörper durch jenen Kreis geteilt wird, der entsteht, wenn die (halbe) Sehne MP mitrotiert?

91) Leite die Formel $V = \frac{h^2\pi}{3} \cdot (3r - h)$ für das Volumen einer Kugelkalotte der Höhe h (mit dem Kugelradius r) her!

92) Die algebraische Kurve mit der Gleichung $x^2y^3 = 1$ rotiert über einem Intervall $[a; b]$ (mit $0 < a < b < \infty$) um die x -Achse, wodurch ein Drehkörper mit dem Basiskreisradius r_1 , der Höhe h und dem Deckkreisradius r_2 entsteht. Beweise für diesen Drehkörper die Volumensformel

$$V = \frac{3 \cdot \pi \cdot h \cdot \sqrt{r_1^3} \cdot \sqrt{r_2^3}}{r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 \cdot r_2}}$$

oder prüfe die Formel für das Intervall $[1; 64]$!

93) Rotiert ein Bogen der NEILSchen Kurve k [$k : y^2 = x^3$] um die x -Achse, so entsteht ein Drehkörper mit dem Basiskreisradius r_1 , der Höhe h und dem Deckkreisradius r_2 . Beweise für diesen Drehkörper die Volumensformel

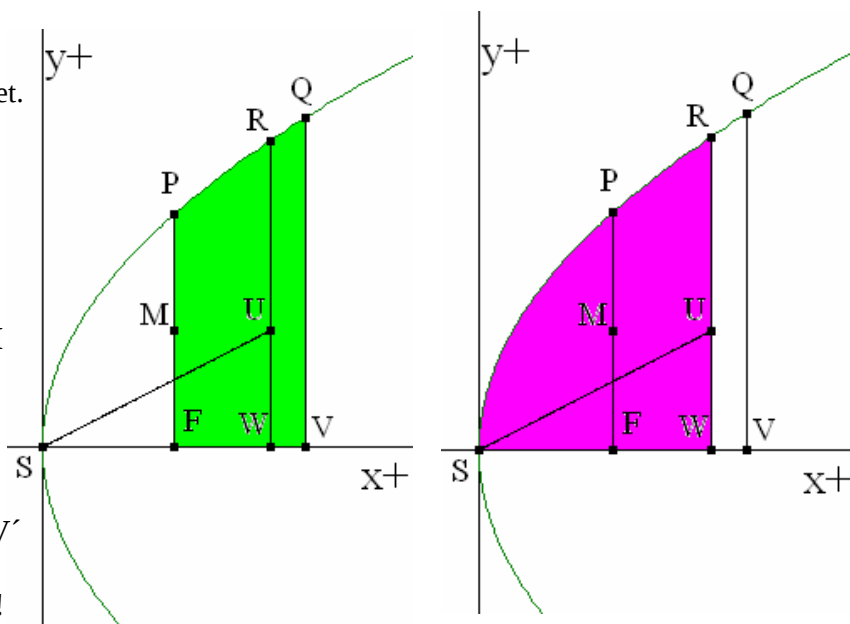
$$V = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot \left(\sqrt[3]{r_1^2} + \sqrt[3]{r_2^2} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{r_1^4} + \sqrt[3]{r_2^4} \right).$$

... oder/und(!) prüfe die Formel für das Intervall $[4; 16]$!

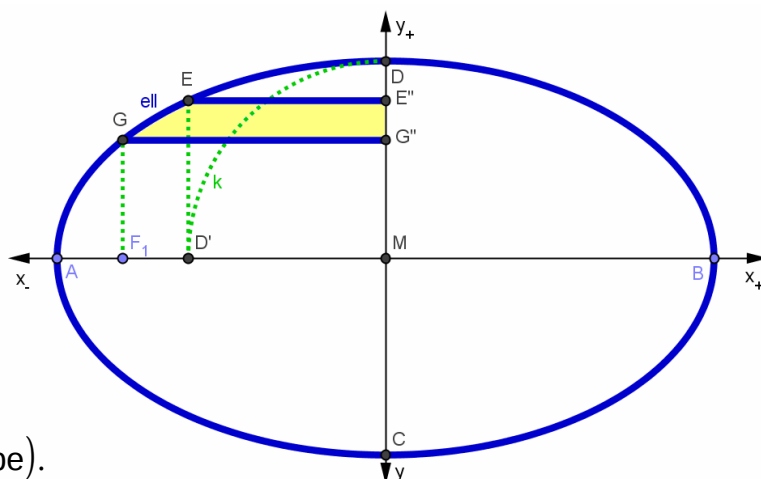
- Zeige, dass die Parabel par mit der Gleichung $ay^2 = 4b^2 \cdot (x-a)$ die Asymptoten der Hyperbel hyp mit der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ berührt. Berechne die Koordinaten der Berührungspunkte T_1 und T_2 in Abhängigkeit von a und b !
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2 von hyp und par in Abhängigkeit von a und b !
- Rotieren die von hyp und par begrenzten Gebiete um die x -Achse, so entsteht ein Drehkörper. Beweise, dass sein Volumen jenem Ellipsoid gleicht, welches bei Rotation der Ellipse ell mit der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ um die x -Achse entsteht!

95) In den nebenstehenden Abbildungen ist jeweils die gleiche Parabel in erster Hauptlage mit dem Focus F, dem Scheitel S sowie dem Spiegelpunkt V von S an F abgebildet.

- a) Rotiert der in der linken Abbildung grün gefärbte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehparaboloidzone. Berechne deren Volumen V in Abhängigkeit des Parabelparameters p !
- b) In der rechten Abbildung bezeichnet M den Mittelpunkt der Strecke FP, ferner gilt $\overline{FM} = \overline{WU} \wedge \overline{SU} = \overline{FP}$. Rotiert der violett gefärbte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehparaboloidkalotte. Berechne deren Volumen V' ebenso in Abhängigkeit des Parabelparameters p und zeige, dass $V = V'$ gilt!

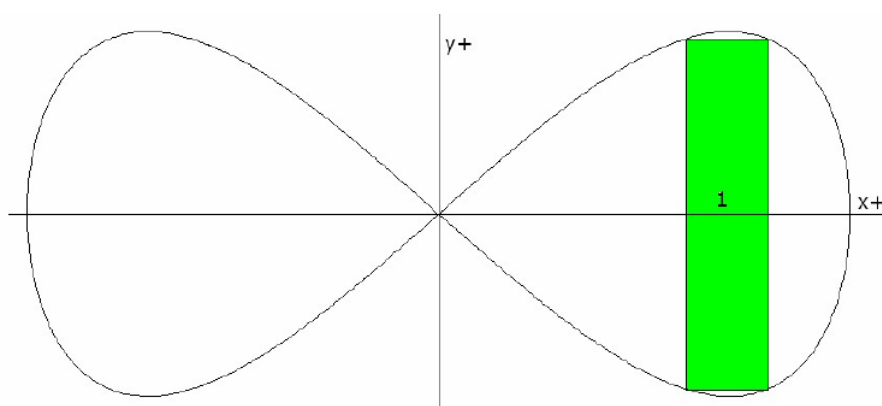


- 96) In nebenstehend abgebildeter Ellipse ell wurde der obere Nebenscheitel D um $+90^\circ$ um M in D' gedreht. G liegt über dem linken Focus F_1 von ell, E direkt über D' . Durch Rotation des kürzeren Ellipsenbogens von E nach G (bzw. äquivalent: des gefärbten Gebiets) um die y-Achse entsteht eine Zone eines linsenförmigen Ellipsoids mit dem Volumen $V = \frac{b\pi}{3a} \cdot |b - e| \cdot (2a^2 - be)$.



Beweise dies oder rechne es am konkreten Beispiel der Ellipse ell [ell: $9x^2 + 25y^2 = 5625$] nach!

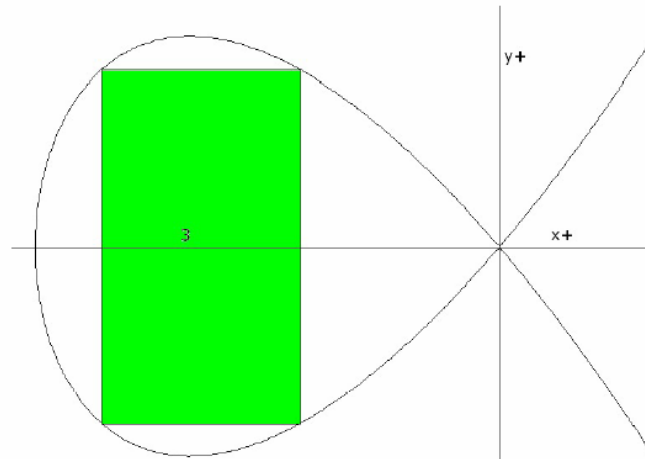
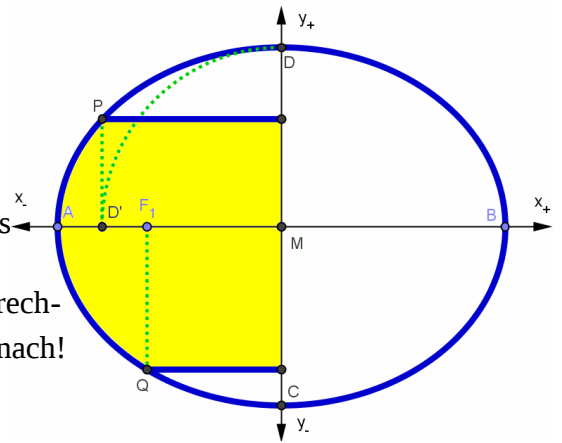
97)



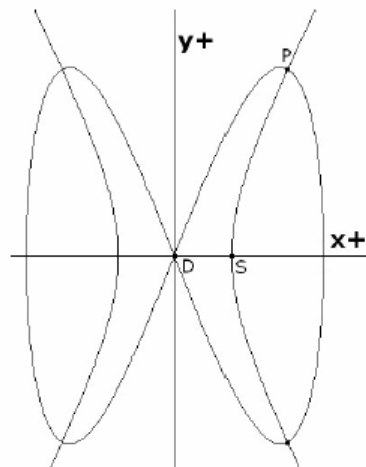
In obiger Figur ist die LISSAJOUS-Kurve k mit der Gleichung $k: y^2 = x^2(25 - x^2)$ abgebildet.

- (a) Rotiert die rechte Schleife von k um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper, dem sich wie in der Abbildung illustriert genau ein Zylinder der Höhe 1 einbeschreiben läßt. Berechne den zugehörigen Radius und begründe die Eindeutigkeit der Lösung!
- (b) Zeige ohne Taschenrechner, dass der Zylinder mehr als $\frac{1}{3}$ des in (a) genannten Drehkörpers einnimmt!

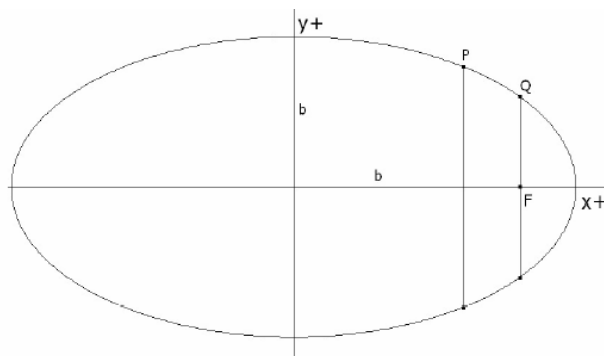
- 98) Der obere Nebenscheitel D der rechts abgebildeten Ellipse wurde um $+90^\circ$ um M in D' gedreht. Q liegt unter dem linken Brennpunkt F_1 von ell, P direkt über D'. Durch Rotation des kürzeren Ellipsenbogens von P nach Q (bzw. äquivalent: des gefärbten Gebiets) um die y-Achse entsteht eine Zone eines linsenförmigen Ellipsoids mit dem Volumen $V = \frac{b\pi}{3a} \cdot (b + e) \cdot (2b^2 + be + 2e^2)$. Beweise dies oder rechne es am Beispiel der Ellipse ell: $16x^2 + 25y^2 = 10000$ nach!



- 99) In obiger Figur ist der NEWTON-Knoten k mit der Gleichung $k: y^2 = x^2(x + 7)$ abgebildet.
- Rotiert die Schleife von k um die x -Achse, so entsteht ein Drehkörper, dem sich wie in der Abbildung illustriert genau ein Zylinder der Höhe 3 einbeschreiben lässt. Berechne den zugehörigen Radius und begründe die Eindeutigkeit der Lösung!
 - Zeige ohne Taschenrechner, dass der Zylinder mehr als 50% des in (a) genannten Drehkörpers einnimmt!

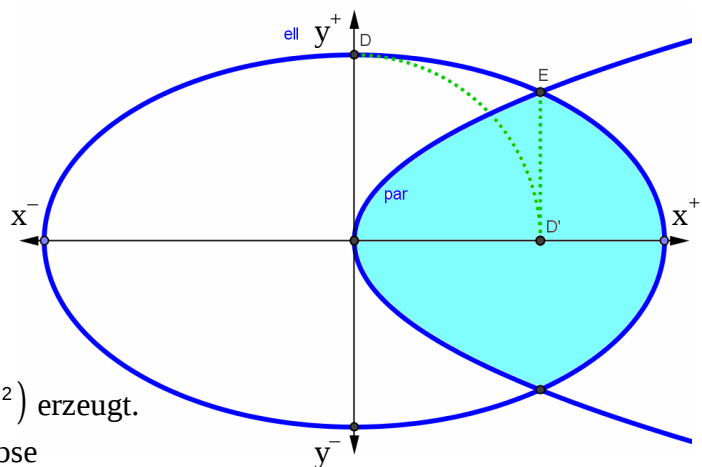


- 100) In obiger Figur sind die Kurven mit den Gleichungen $16y^2 = 3x^2(28 - x^2)$ und $3x^2 - y^2 = 12$ abgebildet.
- Ordne der jeweiligen Kurve die entsprechende Gleichung zu und begründe deine Wahl jeweils!
 - Zeige, dass die beiden Kurven einander in vier Punkten rechtwinklig schneiden!
 - Rotiert der Kurvenbogen von D nach P bzw. von S nach P um die x -Achse, so entsteht jeweils ein Drehkörper. Zeige, dass sich die beiden Volumina wie 23 : 10 verhalten!

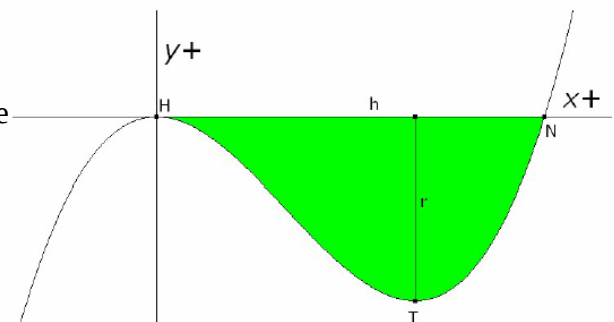


- 101) Rotiert in obiger Abbildung der Ellipsenbogen von P nach Q bzw. die Strecke PQ um die x -Achse, so entsteht eine Zone eines Rotationsellipsoids bzw. ein Drehkegelstumpf. Zeige, dass die Volumina sich wie $a^2 + be$ zu $2a^2 - be$ verhalten (optional: Beweis oder Verifikation für die konkrete Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 25y^2 = 5625$). Zeige allgemein, dass der Quotient $\frac{a^2 + be}{2a^2 - be}$ stets ≤ 1 ist!

- 102) In der rechts abgebildeten Ellipse wurde der obere Nebenscheitel D um -90° um den Koordinatenursprung gedreht, woraus der Punkt D' hervorgeht, über dem unmittelbar der Ellipsenpunkt E liegt. Durch E geht auch eine Parabel in erster Hauptlage par , welche mit der Ellipse im ersten (und vierten) Quadranten ein Gebiet begrenzt, das bei Rotation um die x -Achse einen Drehkörper mit dem Volumen $V = \frac{b^2\pi}{6a^2} \cdot (a - b) \cdot (4a^2 + ab + b^2)$ erzeugt. Beweise dies oder rechne es anhand der Ellipse $ell: 9x^2 + 25y^2 = 140625$ nach!

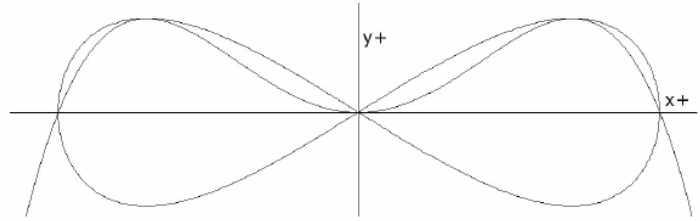


- 103) Der rechts gefärbte Bereich wird von der x -Achse und vom Graphen der Funktion $f[y=f(x)=x^3-6x^2]$ begrenzt und generiert bei Drehung um die x -Achse einen Drehkörper vom Volumen $V = \frac{243\pi}{560} \cdot r^2 h$. Weise die Richtigkeit dieser Volumensformel nach!



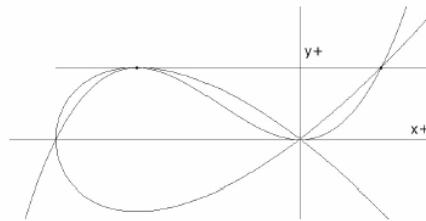
- 104) Ersetzt man den Punkt E in Aufgabe 102) durch jenen Punkt auf ell , welcher sich direkt über dem rechten Brennpunkt von ell befindet, so entsteht auch ein Drehkörper, und zwar mit dem Volumen $V = \frac{b^2\pi}{6a^2} \cdot (a - e) \cdot (4a^2 + ae + e^2)$. Rechne dies für die Ellipse $ell: 9x^2 + 25y^2 = 2250000$ nach oder führe einen allgemeinen Beweis!

105) Gegeben sind die Kurven k_1 [$k_1 : y^2 = x^2(2 - x^2)$] und k_2 [$k_2 : y = x^2(2 - x^2)$].



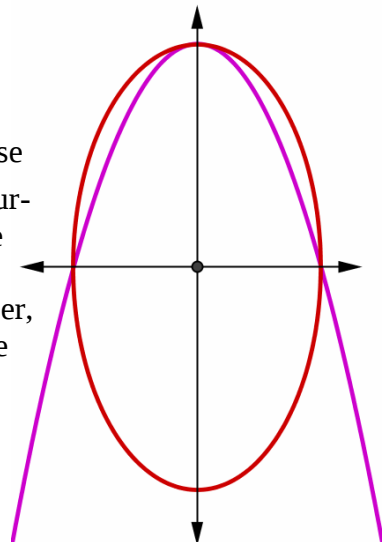
- (a) Ordne den Kurven in obiger Abbildung entsprechend die richtige Beschriftung zu (Begründung!) und zeige, dass sie idente Hochpunkte haben. Wie lässt sich die Existenz gemeinsamer Extremstellen (was noch nicht zwingenderweise zusammenfallende Extrempunkte impliziert! Begründe!) anhand eines Vergleichs der beiden Kurvengleichungen unmittelbar ohne Rechnung einsehen?
- (b) k_1 und k_2 begrenzen mit den positiven Koordinatenachsen jeweils ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x -Achse jeweils einen Drehkörper erzeugt. Zeige, dass sich die Volumina der beiden Drehkörper wie 16 : 21 verhalten.

106) Gegeben sind die Kurven k_1 [$k_1 : y^2 = x^2(x + 3)$] und k_2 [$k_2 : y = \frac{1}{2} \cdot x^2(x + 3)$].



- (a) Ordne den Kurven in obiger Abbildung entsprechend die richtige Beschriftung zu (Begründung!) und zeige, dass sie idente Hochpunkte haben. Wie lässt sich die Existenz gemeinsamer Extremstellen (was noch nicht zwingenderweise zusammenfallende Extrempunkte impliziert! Begründe!) anhand eines Vergleichs der beiden Kurvengleichungen unmittelbar ohne Rechnung einsehen?
- (b) Zeige, dass die beiden Kurven und ihre gemeinsame Hochpunkt tangente noch einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen!
- (c) Rotieren die beiden Gebiete, welche die beiden Kurven im zweiten Quadranten jeweils mit der x -Achse begrenzen um ebene, so entstehen zwei Drehkörper, von denen zu zeigen ist, dass sich ihre Volumina wie 27:35 verhalten.

- 107) Zeige, dass die Ellipse $\text{ell: } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ von der Parabel $\text{par: } y = b - \frac{b}{a^2} \cdot x^2$ zweimal auf der x - und einmal auf der y -Achse geschnitten wird, womit (siehe Abbildung rechts!) die beiden Kurven oberhalb der x -Achse mit selbiger zwei in etwa gleich große Gebiete begrenzen. Beweise oder zeige am Beispiel der Parabel $\text{par: } y = 27 - 3x^2$, dass sich die Volumina jener beiden Drehkörper, die durch Rotation dieser Gebiete um die y -Achse entstehen, wie 3:4 verhalten!



- 108) Wie 107) mit der Rotation um die x -Achse, wobei das entsprechende Verhältnis nun 4:5 beträgt!

**Gutes Gelingen beim Lösen
dieser schönen Aufgaben!**

Lösungen folgen im Herbst 2012!

Wien, im Mai 2012.

Dr. Robert Resel, e. h.