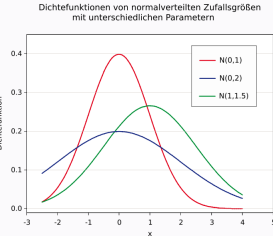
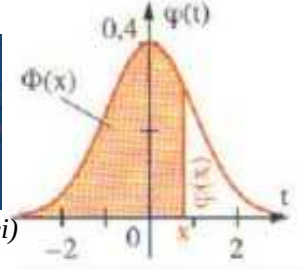
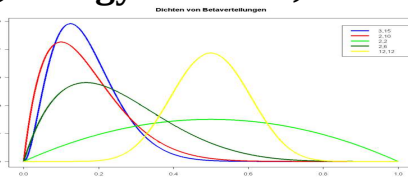
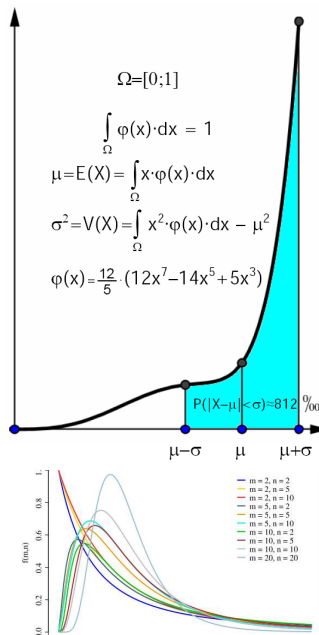


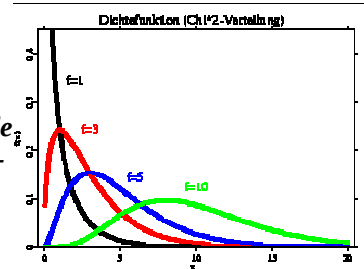
Übungsbeispiele für die 1. Schularbeit (zweistündig)

(8C, Realgymnasium, 2013/14)



Diese Beispiele sollen durch die für das erste (von insgesamt zwei) Stochastikkapitel(n) relevanten Grundaufgaben {Kennen des Begriffs "stetige Zufallsvariable", (Er-)Kennen und Nachweisen der Eigenschaften von Dichtefunktionen stetiger Zufallsvariablen, Arbeiten mit stetigen Zufallsvariablen und Dichtefunktionen (Berechnen von Intervallwahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Varianzen sowie allgemeine Analysen), führen, die du bei der ersten (und dann auch zweiten) Schularbeit (sowie später bei der Klausur) **in jedem Fall** unter Beweis stellen wirst müssen, wobei (wie aus dem bisher Beschriebenen bereits deutlich hervorgeht) auch hier bereits auf Vernetzungen (insbesondere zwischen Integralrechnung und Stochastik) erhöhter Wert gelegt wird.

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine **absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm !!**



§3. (Wahrscheinlichkeits-)Dichtefunktionen stetiger Zufallsvariablen (Aufgaben S1 bis S24)

S1) Schularbeitsbeispiel der 8B(G) vom 2. April 2009:

Die σ -Regel für die Normalverteilung besagt bekanntlich, dass für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ die Beziehung $P(|X-\mu| < \sigma) \approx 68,26\%$ gilt. Betrachte nun im Folgenden die Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;5]$ und der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{12}{625} \cdot (5x^2 - x^3)$.

- Weise nach, dass φ tatsächlich eine Dichtefunktion ist!
- Berechne den Erwartungswert μ von X !
- Ermittle die Standardabweichung σ von X und leite für X die entsprechende σ -Regel her!

S2) Das Alter eines Windis (der nach überstandener Mistkübelversteckphase durchaus ein cooler Hund wird, siehe Abbildung rechts!) kann als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;100]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{62500000} \cdot (x^3 - 275x^2 + 17500x)$ beschrieben werden.

- Weise nach, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist!
- Berechne die durchschnittliche Lebensdauer μ eines Windis!
- Um wie viele Jahre (σ) streut X durchschnittlich um μ ?
- Zeige, dass ziemlich genau die σ -Regel $P(|X-\mu| < \sigma) = 63\%$ gilt!



S3) **Schularbeitsbeispiel der 8C(Rg) vom 1. April 2009:**

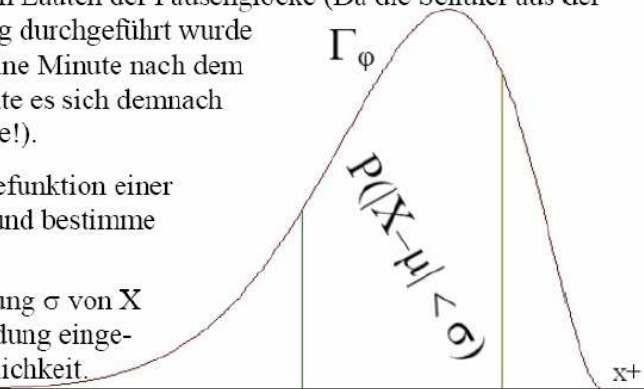
Eine stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ ist nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=1092 \cdot x^{11} \cdot (x-1)^2$ verteilt und ergab sich nach jahr(zehnt)elangen empirischen Untersuchungen über das in Minuten gemessene verspätete Eintreffen von Schülern nach dem Läuten der Pausenglocke (Da die Schüler aus der Schule, in der diese Untersuchung durchgeführt wurde aufgrund von Ω alle spätestens eine Minute nach dem Läuten in der Klasse sind, handelte es sich demnach nicht um die AHS Heustadelgasse!).

a) Zeige, dass φ in der Tat Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist und bestimme den Erwartungswert $E(X)=\mu$.

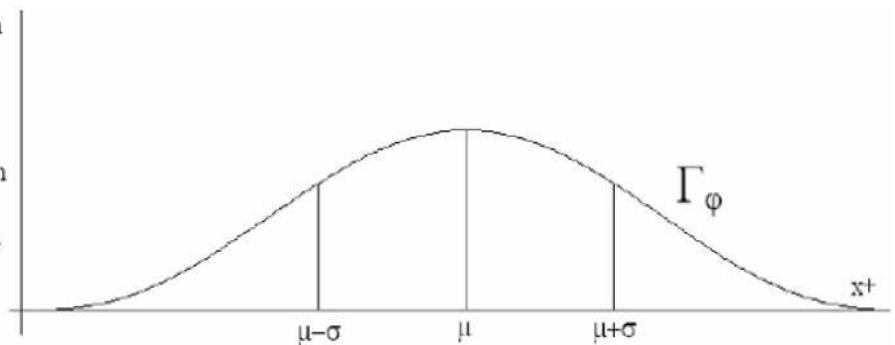
b) Ermittle die Standardabweichung σ von X und berechne die in der Abbildung eingezeichnete Intervallwahrscheinlichkeit.

c) Bei wie vielen von insgesamt 47 Schülern (zwei benachbarte Klassen) sollte daher dem Modell gemäß die Verspätung um maximal σ von μ abweichen?

d) Bei wie vielen von insgesamt 19 Schülern einer Klasse sollte dem Modell gemäß die Verspätung nach oben um mehr als σ von μ abweichen?



S4) Eine stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega_X=[0;1]$ ist nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=140 \cdot x^3 \cdot (1-x)^3$ verteilt und ergab sich nach jahr(zehnt)elangen empirischen Untersuchungen über die Arbeitsdauer bei vierstündigen schriftlichen Klausuren aus Russisch nach Annahmebeginn (drei Stunden nach dem eigentlichen Beginn).



a) Zeige, dass φ in der Tat Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist und bestimme den Erwartungswert $E(X)=\mu$.

b) Ermittle die Standardabweichung σ von X und berechne die Intervallwahrscheinlichkeit $P(|X-\mu|<\sigma)$. Interpretiere das Ergebnis!

c) Bei wie vielen von insgesamt 75 Teilnehmern (drei vom gleichen Prof. unterrichtete Parallelklassen!) sollte daher dem Modell gemäß die Arbeitsdauer um maximal σ von μ abweichen?

S5) Klasse: 8A(G)

1. Schularbeit (zweistündig)

30. 1. 2013

Nachtragstermin für ~~_____~~

Datenschutz !!

1. Sonja hat durch empirische Untersuchungen herausgefunden, dass jene Zeitdauer, die ein Schüler ihrer Schule in einer fünfminütigen Pause mit dem Regeln persönlicher Angelegenheiten zubringt, als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 4]$ durch die Dichtefunktion φ mit folgender Funktionsgleichung modelliert werden kann:

$$\varphi(x) = \frac{7}{2048} \cdot (x^6 - 9x^5 + 20x^4)$$

(a) Weise in allen Einzelheiten nach, dass φ in der Tat alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!

(b) Ermittle die aus Sonjas Modell resultierende durchschnittliche Gesprächszeit μ auf Sekunden genau.

(c) Berechne die Standardabweichung σ von X auf Sekunden genau!

(d) Die fünften Klassen bestehen aus insgesamt 81 Schülern. Bei wie vielen dieser Schüler sollte gemäß Sonjas Modell die fürs Regeln persönlicher Angelegenheiten verwendete Zeit um höchstens σ von μ abweichen?

- S6) BESUCH AUS DER 8B: Julie sagt sich nach der Matura: Bam, ich kauf ' mir einen Ford. ☺ Sie hat dazu recherchiert, dass das "Lebensalter" eines Fords als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{7}{10935} \cdot x^6 + \frac{1}{243} \cdot x^3 + \frac{43}{180}$ über dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ beschrieben wird.
- Weil sie als AHS-Maturantin zum kritischen Denken motiviert wurde, kontrolliert sie freilich zuerst, dass φ auch wirklich eine Dichtefunktion über $\Omega=[0;3]$ ist. Nimm dir an Julie ein Beispiel und checke dies auch!
 - Wie alt wird ein Ford modellgemäß durchschnittlich (μ)? Gib das Resultat in Jahren an!
 - Berechne auch die Standardabweichung σ von X (Ergebnis ebenso in Jahren angeben)!
 - Bei wie vielen von 88 Fords sollte die Arbeitszeit modellgemäß um maximal σ von abweichen?
- S7) Eine breitangelegte Studie ergab, dass die in Stunden gemessene Arbeitszeit bei einem Einstufungstest als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{1}{20} \cdot (-66x^2 + 54x + 15)$ verteilt ist.
- Zeige, dass φ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
 - Ermittle die durchschnittliche Arbeitsdauer μ in Minuten!
 - Berechne die Standardabweichung σ von X (auch in Minuten)!
 - Verifiziere die σ -Regel $P(|X - \mu| < \sigma) = 614\%$!
 - Wie viele von 40 Teilnehmern waren dem Modell nach spätestens nach $\frac{1}{2}$ Stunde fertig?
- S8) Aus einer Studie ging hervor, dass die in Stunden gemessene Arbeitszeit bei einer Aufnahmsprüfung als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{1}{30} \cdot (-42x^2 + 18x + 35)$ verteilt ist.
- Zeige, dass φ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
 - Ermittle die durchschnittliche Arbeitsdauer μ in Minuten!
 - Berechne die Standardabweichung σ von X (auch in Minuten)!
 - Nimm zur σ -Regel $P(|X - \mu| < \sigma) = \frac{41}{68}$ Stellung!
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Teilnehmer länger als $\frac{1}{2}$ Stunde für die Aufnahmsprüfung gebraucht hat?
- S9) Gegeben ist die Polynomfunktion $\varphi [y = \varphi(x) = \frac{3}{128} \cdot (5x^2 - 12x + 8)]$.
- Zeige, dass φ über $\Omega=[0;4]$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist.
 - Ermittle den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ !
 - Bestätige die Richtigkeit der σ -Regel $P(|X - \mu| < \sigma) = \frac{7}{8}$!
- Angenommen, X beschreibt die in Stunden gemessene Arbeitsdauer bei der vierstündigen Klausur aus Mathematik.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener "Schüler" bereits nach 24 Minuten abgegeben hat?
 - e)-m): Berechne nach jeweils 24 weiteren Minuten die entsprechende Wahrscheinlichkeit wie in d)!

Wieder Besuch aus der 8B:

- S10) Die Lebenserwartung eines "Raumgeometrie-Romals" (Roboter mit implementierter dynamischer 3D-Software und menschlichem Look) ist als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;8]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{3}{16384} \cdot (35x^2 - 216x + 800)$ verteilt.



- Begründe, warum in der Tat eine Dichtefunktion vorliegt!
- Wie alt (μ) wird ein Romal gemäß des Modells durchschnittlich?
- Um wie viele Jahre (σ) streut das Lebensalter im Mittel um μ ?
- Bei wie vielen von 16384 Romals (Massenproduktion!) weicht das Lebensalter um maximal σ von μ ab?

Und nochmals Besuch aus der 8B:

- S11) Die Lebenserwartung eines "Tangential-Thomas" (Roboter mit implementierter Software zur Generierung von Tangenten an beliebige Kurven mittels Differentialrechnung) ist als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;9]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{1}{13122} \cdot (50x^2 - 18x + 189)$ verteilt.



- Begründe, warum in der Tat eine Dichtefunktion vorliegt!
- Wie alt (μ) wird ein "TT" gemäß des Modells durchschnittlich?
- Um wie viele Jahre (σ) streut das Lebensalter im Mittel um μ ?
- Bei wie vielen von 19683 TTs (Massenproduktion!) weicht das Lebensalter um maximal σ von μ ab?

- S12) Die drei Annas sahen sich bei "Anna Ba" (kurz: "AB(B)A") am **Freitag, den 13.**Jänner 2012 auf AB(B)As exakt zwei Jahre alten DVD-Player den Film "An(n)anas Express" an. Plötzlich streikte der DVD-Player, was AB(B)A (aber auch "ABR(A)" und "AK(A)") äußerst stutzig machte. In der Gebrauchsanweisung ihres Geräts (Marke *Nasopanic* ©) fand AB(B)A überraschenderweise die Information, dass abseits der einjährigen Garantie die Lebensdauer dieser Geräte als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[1;5]$ durch die Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{3}{4096} \cdot (115x^2 - 562x + 839)$ modelliert werden kann.



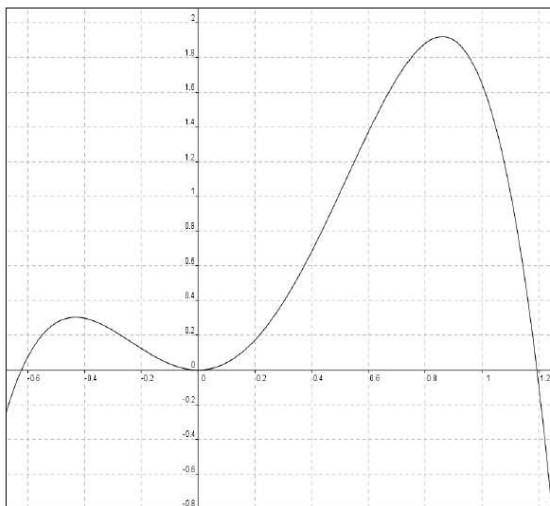
- Keine der Annas vertraute dieser Gebrauchsanweisung zu 100%, weshalb sie ϕ erst einmal auf ihre typischen Eigenschaften überprüften. Stimme mit den drei Damen ein!
- Welche durchschnittliche Lebensdauer μ ergibt sich? Hatte AB(B)As DVD-Player dieses Alter schon erreicht?
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- AB(B)As DVD-Player stammte aus einer 295er-Palette. Bei wie vielen dieser Geräte sollte die Lebensdauer um höchstens σ von μ abweichen? Fiel AB(B)As Gerät auch in diesen Bereich?
- Wie viele Geräte aus der Palette aus d) werden älter als $4\frac{3}{4}$ Jahre? (Die Frage, ob AB(B)As DVD-Player in diesen Bereich fiel, wäre eine Beleidigung eurer aller Intelligenz und soll daher an dieser Stelle entfallen! ☺)

S16) bis S20) aus der letztjährigen 8A:

S16)

Alexandra hat Lara

bzgl. Ihrer Peer-Tätigkeit

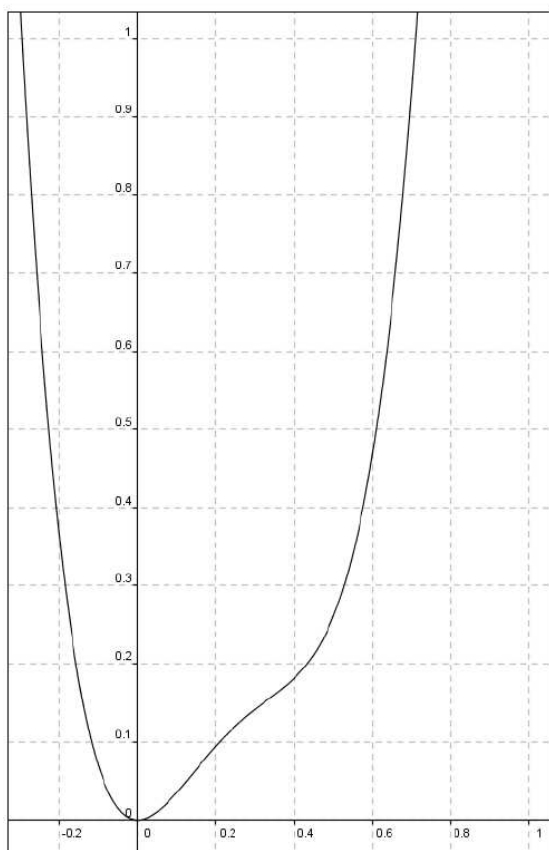


beobachtet

Resultat von Alexandras Bemühungen ist die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = 0.15 \cdot (-35x^4 + 20x^3 + 26x^2)$ mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$, wobei die Einheit hier exakt eine Stunde ist (Laras Sprechstunde findet von 10.10 bis 11.10 statt.). Zeige, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist (Verwende für deine Argumentation auch die linke Abbildung, deren Richtigkeit du auch nachweisen sollst! Was lässt sich daraus ferner ablesen?), berechne den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ und nimm Stellung zu Alexandras folgender σ -Regel:

$$P(|X - \mu| < \sigma) = \frac{9}{14}$$

S17)



Nun tauschen Alexandra und Lara die Rollen, was bei gleichbleibendem Ereignisraum Laras Dichtefunktion φ mit der angegebenen Funktionsgleichung liefert.

$$\varphi(x) = \frac{5}{6} \cdot (21x^4 - 20x^3 + 6x^2)$$

Zeige, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist (Verwende für deine Argumentation auch die linke Abbildung, deren Richtigkeit du auch nachweisen sollst! Was lässt sich daraus ferner ablesen und warum ist es nicht besonders wichtig, exakt zu sehen, wie der Graph von φ ab ca. 0,7 weiterverläuft? Begründe!) und berechne sowohl den Erwartungswert μ als auch die Standardabweichung

$$P(|X - \mu| < \sigma) = \frac{33}{38}$$

Nimm ferner Stellung zu Laras obiger σ -Regel!

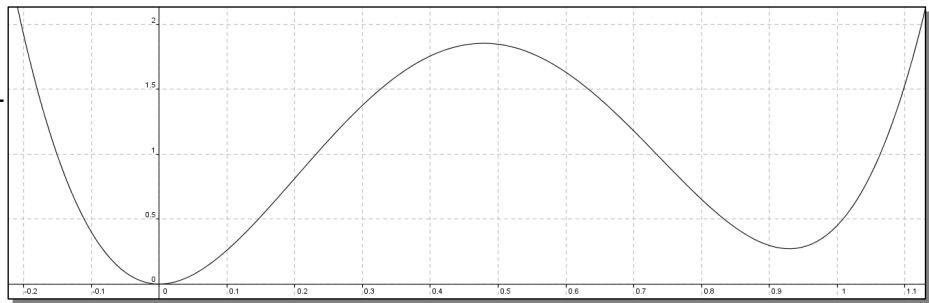
P.S.: Auch Alexandras Sprechstunde findet von 10.10 bis 11.10 statt!

- S18) Wie S16), nur dass Alexandra nun Lenas Tätigkeit statistisch ausgewertet hat und bei gleichbleibendem Ereignisraum Alexandra eine **neue** Dichtefunktion φ mit der angegebenen Funktionsgleichung erhält, aber dennoch an der "alten" σ -Regel festhält. Kommentiere dies und vergleiche die Modelle aus dieser Aufgabe und Aufgabe S20) miteinander (auch im Hinblick auf die Gestalt des Graphen von φ !).

$$P(|X - \mu| < \sigma) = \frac{9}{14}$$

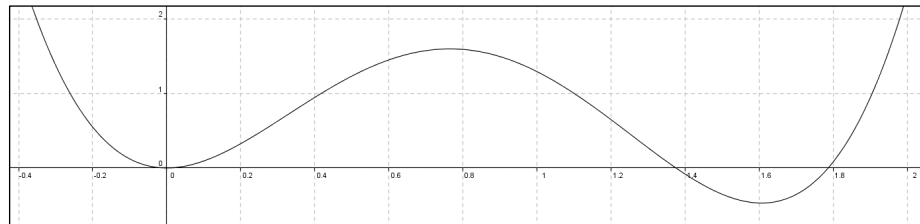
$$\varphi(x) = \frac{1}{15} \cdot (-105x^4 + 40x^3 + 78x^2)$$

s19) Jetzt untersucht Lena Alexandras Tätigkeit und stößt bei gleichbleibendem Ereignisraum im Rahmen ihrer stochastischen Analyse auf die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = 0.15 \cdot (245x^4 - 460x^3 + 218x^2)$.



Weise nach, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt, erläutere den obigen Funktionsgraphenverlauf (Begründe auch die Richtigkeit der Darstellung! Was lässt sich ferner daraus ablesen?) und nimm Stellung zu Lenas σ -Regel $P(|X - \mu| < \sigma) = 66\%$!

s20) Nun hat Dave Alexandras Tätigkeit analysiert und stieß bei gleichbleibendem Ereignisraum im Rahmen seiner stochastischen Analyse auf die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{1}{24} \cdot (105x^4 - 332x^3 + 258x^2)$.



Weise nach, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt, erläutere den obigen Funktionsgraphenverlauf (Begründe auch die Richtigkeit der Darstellung! Was lässt sich ferner Daraus ablesen?) und nimm Stellung zu Daves σ -Regel $P(|X - \mu| < \sigma) = 57/91$!

S21) Aus: 2. Schularbeit (dreistündig)

Klasse 8A (Gymnasium), 9. 4. 2013

NACHTRAGSTERMIN FÜR

*2. Klausur
Schwartz*

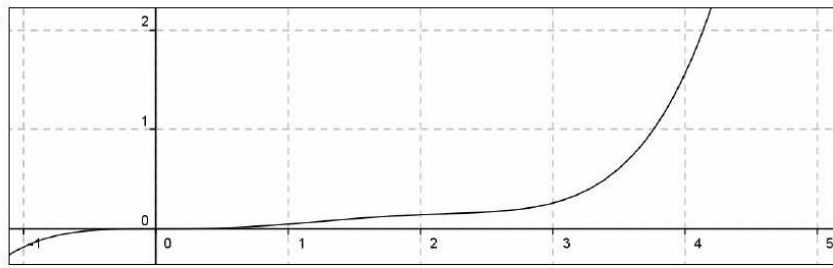
“Hello Kitty“-Katzen (HKKen) ~~die~~ ~~jede in der unteren Altersklasse~~ werden bis zu sage und schreibe dreißig Jahre alt! Die stochastisch äußerst firme Veterenärprofessorin Nikki Newhold hat die Lebensdauer von HKKen statistisch analysiert und gelangte zu folgendem Modell: Die in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 3]$ und der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{5}{486} (14x^5 - 63x^4 + 72x^3)$ beschreibt das Alter von HKKen.

- (a) Beweise, dass φ wirklich eine Dichtefunktion ist! 5P
- (b) Berechne die durchschnittliche Lebensdauer (μ) in Jahren! 2P
- (c) Um wie viele Jahre (σ) streut diese Lebensdauer im Mittel um μ ? 2P
- (d) Bei wie vielen von 128 HKKen weicht daher die Lebensdauer um höchstens σ von μ ab? 3P

S22) Die Polynomfunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{8192} \cdot (7x^5 - 80x^3 + 384x)$ ist Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 4]$, welche die Arbeitszeit bei der vierstündigen Klausur aus Latein misst.

- a) Zeige, dass φ tatsächlich eine Dichtefunktion ist!
- b) Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ !
- c) Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- d) Wie viele der 256 Teilnehmer weisen daher eine Arbeitszeit auf, die um höchstens σ von μ abweicht?

S23) Die rechte Abbildung zeigt den Graphen der Funktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x) = \frac{3}{12800} \cdot (49x^5 - 280x^4 + 440x^3)$, welche jene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 4]$ beschreibt, die das Dienstalder von HTL-Professoren bei Beendigung ihrer Lehrtätigkeit (sei es durch Pensionierung oder aus anderen Gründen) in Dekaden angibt.



- Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt und begründe auch die Richtigkeit des Funktionsgraphenverlaufs in der Abbildung! Welche Rückschlüsse kannst du aus der Abbildung ziehen?
- Berechne die durchschnittliche Beschäftigungsdauer μ österreichischer HTL-Lehrer!
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- Bei wie vielen von 17 HTL-Professoren sollte daher dem Modell gemäß die Beschäftigungsdauer um höchstens σ von μ abweichen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit (auf Promille genau) hat ein zufällig herausgegriffener HTL-Professor maximal 20 Jahre unterrichtet?

S24) Gegeben ist die Polynomfunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $y = \phi(x) = \frac{12}{823543} \cdot (8x^5 - 455x^3 + 7546x)$.

- Zeige, dass ϕ über $\Omega = [0; 7]$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist.
- Ermittle den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ von X !
- Nimm Stellung zur σ -Regel $P(|X - \mu| < \sigma) = \frac{19}{35}$!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!