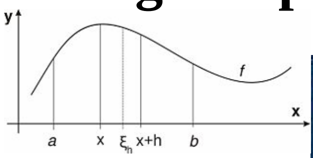
Propädeutik (auch als Anregung für Philosophie!):

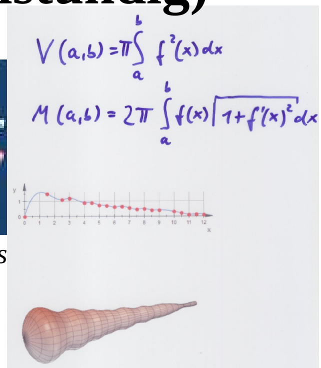
"Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse."

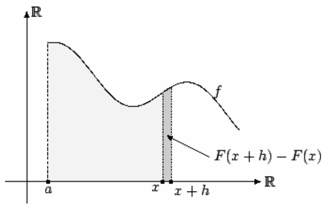
RENÉ DESCARTES (1596-1650), französischer Philosoph und Mathematiker

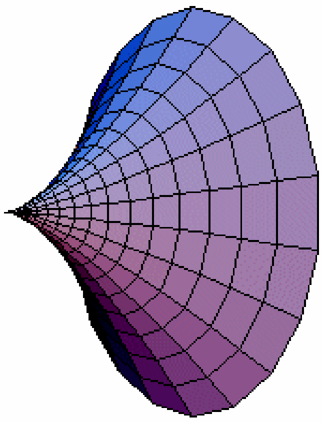
Übungsbeispiele für die 1. Schularbeit (zweistündig)

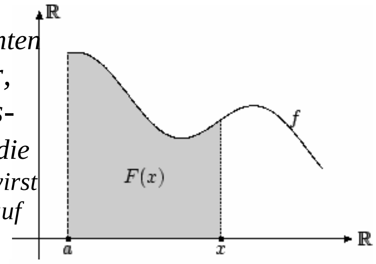
(8C, Realgymnasium, PM5, WS 2008/09)





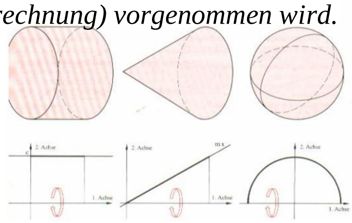




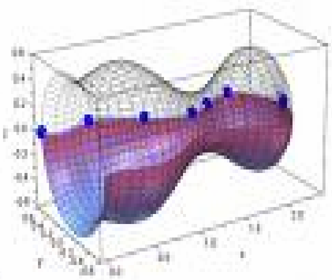


Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil des Kapitels "Integralrechnung" relevanten Grundaufgaben {Ermitteln von Stammfunktionen sowohl durch elementare Integrationsregeln [$\int x^{\alpha}\cdot dx = (\alpha+1)^{-1}\cdot x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$] *als auch durch die [einzige![1]] anspruchsvollere [aber notwendige!] "Substitutionsregel"* [$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy, \quad y=g(x), dy = g'(x)dx$]*, Anwendung des bestimmten Integrals auf geometrische Problemstellungen [Quadratur, Kubatur (inkl. Entwerfen bzw. Beweisen von Volumsformeln!), Rektifikation und Komplanation]} führen, die du bei der ersten Schularbeit* ***in jedem Fall*** *unter Beweis stellen wirst müssen, wobei hier bereits (nicht zuletzt auch schon im Hinblick auf die Matura!) eine* ***Vernetzung*** *mit den* ***Grundlagen*** *des Stoffs der 7. Klasse (Kegelschnitte und Differentialrechnung) vorgenommen wird.*

$$L = \int^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$



$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$



ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine **absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm !!**

§1. Stammfunktionen (Aufgaben 1 bis 23)

1) Der Graph einer reellen Funktion f, von der man mit $f'''(x) = \frac{-12}{(x+1)^4}$ die dritte Ableitungsfunktion kennt, geht durch die Punkte P(–3|–5), Q(0|1) und R(1|1). Ermittle die Funktionsgleichung von f!

2) Der Graph einer reellen Funktion f, von der man mit $f^{(IV)}(x) = \frac{24x^2-192x+144}{(x+1)^7}$ die vierte Ableitungsfunktion kennt, weist den Tiefpunkt T(0|0) und den Hochpunkt $H\left(2\middle|\frac{4}{27}\right)$ auf. Ermittle die Funktionsgleichung von f!

[1]: Ebenso wie die Substitutionsregel die Umkehrung der Kettenregel aus der Differentialrechnung darstellt, gibt es sowohl zur **Produktregel** als auch zur **Quotientenregel** aus der Differentialrechnung in der Integralrechnung mit den Techniken der ***Partiellen Integration*** bzw. der ***Partialbruchzerlegung*** die entsprechenden "Umkehrregeln", welche ich euch aber großzügigerweise erspare; zumal sie (anders als die Substitutionsmethode!) nicht unbedingt notwendig sind …

3) Der Graph einer reellen Funktion f, von der man mit $f'''(x)=\frac{18x+6}{(1-x)^5}$ die dritte Ableitungsfunktion kennt, geht durch den Koordinatenursprung und besitzt den Tiefpunkt $T\left(3\middle|\frac{27}{4}\right)$. Ermittle die Funktionsgleichung von f!

4) $t[T(2|32),\ \mathrm{I}(0|128)]$ ist Linienelement des Graphen Γ_f einer Funktion f, von welcher man mit $f''(x)=\frac{20x^3}{(x-1)^6}$ die zweite Ableitungsfunktion f'' kennt. Ermittle die Funktionsgleichung von f (Lösung: $y=f(x)=\frac{x^5}{(x-1)^4}$).

5) Von einer rationalen Funktion f kennt man mit $f'''(x)=\frac{-6}{(x+2)^4}$ das Bildungsgesetz der dritten Ableitungsfunktion, sowie den Wendepunkt $W(-3|y_W)$ mit der entsprechenden Wendetangente $t_W[I(-4|27),\ II(1|-18)]$. Ermittle die Funktionsgleichung von f. [Zeige, dass $y=f(x)=\frac{x^3+9}{x+2}$ gilt.]

6) Der Graph Γ_f einer Polynomfunktion sechsten Grades f weist im Ursprung einen Flachpunkt auf und verfügt ferner über den Wendepunkt $W_1(-54|y_1)$ sowie den Wendepunkt $W_2(28|-1904)$ samt Wendetangente $t[W_2,\ I(17|43)]$. Stelle die Funktionsgleichung auf und berechne auch alle Nullstellen von f!

7) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\frac{3x+6}{\sqrt{x+3}}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung von f, wenn Γ_f durch den Ursprung verläuft.

8) W(–1|12) ist der Wendepunkt des Graphen Γ_f einer normierten Polynomfunktion dritten Grades f, deren Wendetangente durch den Ursprung verläuft. Ermittle die Funktionsgleichung und ferner die Extremstellen von f.

9) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\dfrac{3x^8+6x^5-3x^2}{(x^3+1)^2}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung (vage Vermutung?) von f, wenn Γ_f durch den Punkt P(0|1) verläuft (Probe durch Differenzieren!).

10) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\dfrac{5x^5+10x^3-5x}{(x^2+1)^2}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung (vage Vermutung?) von f, wenn Γ_f durch den Punkt P(2|6) verläuft (Probe durch Differenzieren!).
Zusatzfrage: Hat die Gerade g[P, Q(x_Q|18)$\in \Gamma_f$] mit Γ_f nebst P und Q noch weitere Punkte gemeinsam?

11) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\dfrac{3x^8+6x^5-3x^2}{(x^3+1)^2}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung (vage Vermutung?) von f, wenn Γ_f durch den Punkt P(1|0) verläuft (Probe durch Differenzieren!).

12) Für eine Funktion f, deren Graph durch den Ursprung geht, gilt $f'(x)=\dfrac{4x-6x^3}{\sqrt{1-x^2}}$. Stelle die Funktionsgleichung auf!	13) Für eine Funktion f, deren Graph durch den Ursprung geht, gilt $f'(x)=\dfrac{6x^2-9x^5}{\sqrt{1-x^3}}$. Stelle die Funktionsgleichung auf!

14) Für eine Funktion f, deren Graph durch den Punkt (a|0) geht,
gilt $f'(x)=\frac{\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}{x^{1/3}}$. Stelle die Funktionsgleichung auf!

15) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\frac{4x^7+6x^5}{(x^2+1)^2}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung (vage Vermutung?) von f, wenn Γ_f durch den Ursprung verläuft (Probe durch Differenzieren!).

16) Der Graph einer Polynomfunktion f vierten Grades geht durch den Punkt (1|–121) und besitzt ferner die Wendepunkte W_1(–4|–1536) und W_2(5|–2625). Stelle die Funktionsgleichung auf!
Zusatz: Ermittle auch alle Nullstellen von f!

17) Der Graph einer Polynomfunktion f vierten Grades geht durch den Punkt (19|–361) und besitzt ferner die Wendepunkte W_1(4|3584) und W_2(15|3375). Stelle die Funktionsgleichung auf!
Zusatz: Ermittle auch alle Nullstellen von f!

18) t_1[W_1(–3|–945), I(–1|27)] ist die Wendetangente in W_1 an den Graphen Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f, wobei W_2(8|–10240)] der zweite Wendepunkt von Γ_f ist. Stelle die Funktionsgleichung auf!
Zusatz: ***Ermittle auch alle Nullstellen von f sowie die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts P von t_1 und Γ_f und verifiziere für P(x_P|y_P) die Beziehung y_p:x_P=d, wobei d aus der Gleichung t_1: y = kx+d stammt!***

19) Der Graph Γ_f einer Polynomfunktion fünften Grades f besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt und geht durch den Punkt P(18|–9). Ferner weist f an den Stellen x = 6 und x = 15 (weitere!) Wendestellen auf. Stelle die Funktionsgleichung auf und ermittle ferner sowohl die vollständigen Wendepunkte und Koordinaten des relativen Tiefpunkts von Γ_f als auch alle Nullstellen von f!

20) Der Graph Γ_f einer Polynomfunktion fünften Grades f weist im Ursprung einen Sattelpunkt auf und besitzt den Wendepunkt W(21|40817). Außerdem liegt an der Stelle x = 90 eine weitere Wendestelle von f vor. Stelle die Funktionsgleichung auf, ermittle die fehlende Wendepunktkoordinate und berechne auch alle Nullstellen von f!

21) Der Graph Γ_f einer Polynomfunktion sechsten Grades f verfügt über den Flachpunkt F(0/y_F), den Wendepunkt W_1(2|1) samt Wendetangente t[W_1, I(–10|–13)] sowie den Wendepunkt W_2(4|0). Stelle die Funktionsgleichung auf und berechne auch alle Nullstellen von f!

22) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\frac{3x^8+6x^5}{(x^3+1)^2}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung (vage Vermutung?) von f, wenn Γ_f durch den Ursprung verläuft (Probe durch Differenzieren!).

23) Von einer Funktion f kennt man via $f'(x)=\frac{4x^8+8x^5}{(x^3+1)^2}$ die erste Ableitungsfunktion f ´. Ermittle die Funktionsgleichung (vage Vermutung?) von f, wenn Γ_f durch den Punkt P(1|3) Ursprung verläuft (Probe durch Differenzieren!).

24) H(–1|0) und W(0|–2) sind der Hoch- und der Wendepunkt des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades. Ermittle die Funktionsgleichung!

25) H(–1|4) und W(0|2) sind der Hoch- und der Wendepunkt des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades. Ermittle die Funktionsgleichung!

Lösungen der Aufgaben zu §1 (Stammfunktionen)

Lsg. von 1): $y=f(x)=(x^2+1)/(x+1)$

Lsg. von 2): $y=f(x)=x^2/(x+1)^3$

Lsg. von 3): $y=f(x)=x^3/(x-1)^2$

Lsg. von 4): $y=f(x)=x^5/(x-1)^4$

Lsg. von 5): $y=f(x)=(x^3+9)/(x+2)$

Lsg. von 6): $y=\frac{1}{614656}\cdot\left(x^6+39x^5-3780x^4\right)$
$N_1=N_2=N_3=N_4=F(0|0)$, $N_5(-84|0)$, $N_6(45|0)$

Lsg. von 7): $y=f(x)=2x\sqrt{x+3}$

Lsg. von 8): $y=f(x)=x^3+3x^2-9x+1$, $H(-3|28)$, $T(1|-4)$

Lsg. von 9): $y=f(x)=(x^6+1)/(x^3+1)$

Lsg. von 10): $y=f(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{x^4-x^2}{x^2+1}$, in beiden Fällen [$Q(3|18)$ wie $Q´(-3|18)$] keine weiteren Punkte

Lsg. von 11): $y=f(x)=(x^6-x^3)/(x^3+1)$, Lsg. von 12): $y=2x^2\cdot\sqrt{1-x^2}$

Lsg. von 13): $y=2x^3\cdot\sqrt{1-x^3}$, Lsg. von 14): $y=\sqrt{\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^3}$

Lsg. von 15): $y=f(x)=x^6/(x^2+1)$

Lsg. von 16): $y=f(x)=x^4-2x^3-120x^2$
$N_1=N_2=T(0|0)$, $N_3(-10|0)$, $N_4(12|0)$

Lsg. von 17): $y=f(x)=x^4-38x^3+360x^2$
$N_1=N_2=T(0|0)$, $N_3(18|0)$, $N_4(20|0)$

Lsg. von 18): $y=f(x)=x^4-10x^3-144x^2$
$N_1=N_2=T(0|0)$, $N_3(-8|0)$, $N_4(18|0)$
$P(19|9747)$

Lsg. von 19): $y=\frac{1}{3888}\cdot\left(x^5-35x^4+300x^3\right)$
$W_1(6|7)$, $W_2(15|0)$, $N_1=N_2=N_3=S(0|0)$, $N_4=W_2$, $N_5(20|0)$, $T(18|-1{,}8)$

Lsg. von 20): $y=\frac{1}{648}\cdot\left(x^5-185x^4+6300x^3\right)$
$W_2(90|-2531250)$, $N_1=N_2=N_3=S(0|0)$, $N_4(45|0)$, $N_5(140|0)$

Lsg. von 21): $y=\frac{1}{96}\cdot\left(x^6-9x^5+20x^4\right)$
$N_1=N_2=N_3=N_4=F(0|0)$, $N_5=W_2$, $N_6(5|0)$

Lsg. von 22): $y=f(x)=x^6/(x^3+1)$

Lsg. von 23): $y=f(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{\left(x^3+2\right)^2}{x^3+1}$

Lsg. von 24): $y = f(x) = x^3-3x-2$

Lsg. von 25): $y = f(x) = x^3-3x+2$